

2015-2016 高一（上）期末数学试卷

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. 已知集合 $M = \{x | x > x^2\}$, $N = \{y | y = \frac{4^x}{2}, x \in M\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | 0 < x < \frac{1}{2}\}$ B. $\{x | \frac{1}{2} < x < 1\}$ C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | 1 < x < 2\}$

2. 要得到 $y = \cos 2x$ 的图象，只需要将函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图象 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

3. 在下列向量组中，可以把向量 $\vec{a} = (3, 2)$ 表示出来的是 ()

- A. $\vec{e}_1 = (0, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, 2)$ B. $\vec{e}_1 = (-1, 2)$, $\vec{e}_2 = (5, -2)$
C. $\vec{e}_1 = (3, 5)$, $\vec{e}_2 = (6, 10)$ D. $\vec{e}_1 = (2, -3)$, $\vec{e}_2 = (-2, 3)$

4. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$, $\cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) =$ ()

- A. $\frac{5}{9}\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 根据统计，一名工人组装第 x 件某产品所用的时间（单位：分钟）为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & x < A \\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x \geq A \end{cases} \quad (A, c \text{ 为常数}).$$

已知工人组装第 4 件产品用时 30 分钟，组

装第 A 件产品用时 15 分钟，那么 c 和 A 的值分别是 ()

- A. 75, 25 B. 75, 16 C. 60, 25 D. 60, 16

6. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x} + \tan(\frac{\pi}{2}x)$ 落在区间 $(-3, 5)$ 的所有零点之和为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

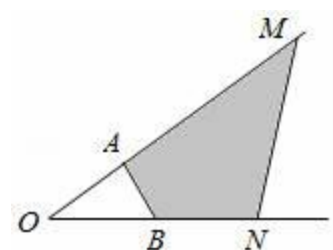
7. 函数 $y = \sqrt{\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)}$ 的单调增区间是 ()

- A. $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{6}]$, $k \in \mathbb{Z}$ B. $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi - \frac{\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$

C. $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$ D. $[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$

8. 如图, A、B 分别是射线 OM、ON 上的点, 给出下列以 O 为起点的向量: ① $\vec{OA} + 2\vec{OB}$;

② $\frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$; ③ $\frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$; ④ $\frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$; ⑤ $\frac{3}{4}\vec{OA} + \vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$. 其中终点落在阴影区域内的向量的序号有 ()

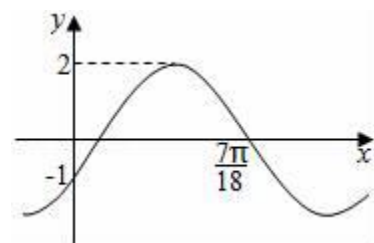


A. ①②④ B. ①③ C. ②③⑤ D. ①③⑤

9. 定义在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的函数 $y=6\cos x$ 与 $y=5\tan x$ 的图象交点为 P, 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 P_1 , 直线 PP_1 与 $y=\sin x$ 的图象交于点 P_2 , 则线段 P_1P_2 的长度为 ()

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

10. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ 的部分图象如图所示, 则函数的解析式可以是 ()



A. $f(x) = 2\cos(3x + \frac{2\pi}{3})$

B. $f(x) = 2\sin(\frac{15}{7}x - \frac{5\pi}{6})$

C. $f(x) = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$

D. $f(x) = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 或 $f(x) = 2\sin(\frac{15}{7}x - \frac{5\pi}{6})$

11. 关于 x 的方程 $a\sin x + b\cos x + c = 0$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个相异实根 α, β , 则 $\sin(\alpha + \beta)$ = ()

A. $\frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}$ B. $-\frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}$
 C. $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ D. $-\frac{2ab}{a^2+b^2}$

12. 函数 $f(x) = \sin 2x + 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}$, $g(x) = m\cos(2x - \frac{\pi}{6}) - 2m + 3$ ($m > 0$), 若对任意 $x_1 \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 存在 $x_2 \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 使得 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(1, \frac{4}{3})$ B. $(\frac{2}{3}, 1]$ C. $[\frac{2}{3}, 1]$ D. $[1, \frac{4}{3}]$

二、填空题

13. 扇形 AOB 周长为 8, 圆心角为 2 弧度, 则其面积为_____.

14. 已知 $\log_2 3 = t$, 则 $\log_{48} 54 =$ _____ (用 t 表示)

15. 已知函数 $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$) 是区间 $[\frac{3}{4}\pi, \pi]$ 上的增函数, 则 ω 的取值范围是_____.

16. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$, 若对任意的 $x \in [t, t+2]$, 不等式 $f(x+t) \geq 2f(x)$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是_____.

三、解答题 (共 6 题, 共 70 分)

17. (10 分) 已知向量 $\vec{a} = (\sin \alpha, \frac{3}{2})$, $\vec{b} = (\cos \alpha, -1)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

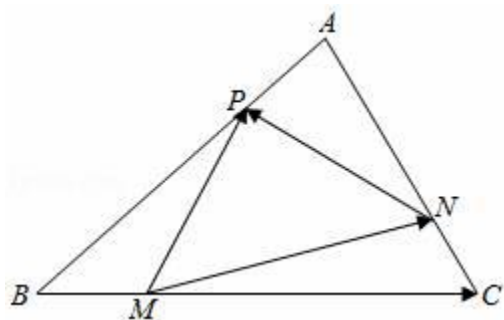
(1) 若 α 为第二象限角, 求 $\frac{\sin(-\alpha - \frac{\pi}{2})\cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha)\tan(\pi - \alpha)}{\tan(-\alpha - \pi)\sin(-\pi - \alpha)}$ 的值;

(2) 求 $\cos^2 \alpha - \sin 2\alpha$ 的值.

18. (10 分) 如图, M、N、P 分别是三角形 ABC 三边 BC、CA、AB 上的点, 且满足 $\frac{AP}{AB} = \frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{4}$, 设 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$.

(1) 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\vec{MN}$;

(2) 若点 G 是三角形 MNP 的重心, 用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示 $\vec{AG}$.



19. (12 分) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\phi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的最小值为 -2 , 其相邻两条对称轴距离为 $\frac{\pi}{2}$, 函数图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 单位后所得图象对应的函数为偶函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(\frac{x_0}{2}) = -\frac{3}{8}$, 且 $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, 求 $\cos(x_0 + \frac{\pi}{6})$ 的值.

20. (12 分) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = 2\cos\omega x \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$) 的周期为 π .

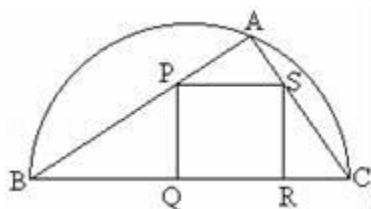
(1) 求 ω 的值及 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 记 $g(x) = f(x) + \sin(x - \frac{\pi}{6})$, 求 $g(x)$ 的值域.

21. (13 分) 如图, 某园林单位准备绿化一块直径为 BC 的半圆形空地, $\triangle ABC$ 外的地方种草, $\triangle ABC$ 的内接正方形 $PQRS$ 为一水池, 其余的地方种花. 若 $BC = a$, $\angle ABC = \theta$, 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S_1 , 正方形 $PQRS$ 的面积为 S_2 .

(1) 用 a, θ 表示 S_1 和 S_2 ;

(2) 当 a 为定值, θ 变化时, 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值, 及此时的 θ 值.



22. (13 分) 已知函数 $y = x + \frac{a}{x}$ 有如下性质: 当 $a > 0$ 时, 函数在 $(0, \sqrt{a}]$ 单调递减, 在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 单调递增. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = |t(x + \frac{4}{x}) - 5|$, 其中 $t > 0$.

-
- (1) 若函数 $f(x)$ 分别在区间 $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调, 求 t 的取值范围
- (2) 当 $t=1$ 时, 若方程 $f(x) - k=0$ 有四个不相等的实数根 x_1, x_2, x_3, x_4 , 求 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围
- (3) 当 $t=1$ 时, 是否存在实数 a, b 且 $0 < a < b \leq 2$, 使得 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的取值范围是 $[ma, mb]$, 若存在, 求出实数 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

2015-2016 高一（上）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. 已知集合 $M = \{x | x > x^2\}$, $N = \{y | y = \frac{4^x}{2}, x \in M\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | 0 < x < \frac{1}{2}\}$ B. $\{x | \frac{1}{2} < x < 1\}$ C. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | 1 < x < 2\}$

【考点】一元二次不等式的解法；交集及其运算；指数函数的定义、解析式、定义域和值域.

【分析】利用一元二次不等式的解法和指数函数的性质可化简集合 M , N . 再利用交集的运算即可得出.

【解答】解：对于集合： M ：由 $x > x^2$ ，解得 $0 < x < 1$ ， $\therefore M = \{x | 0 < x < 1\}$.

$\because 0 < x < 1$ ， $\therefore 1 < 4^x < 4$ ， $\therefore \frac{1}{2} < \frac{4^x}{2} < 2$. $\therefore N = \{y | \frac{1}{2} < y < 2\}$.

$\therefore M \cap N = \{x | \frac{1}{2} < x < 1\}$.

故选 B.

【点评】熟练掌握一元二次不等式的解法和指数函数的性质、交集的运算等是解题的关键.

2. 要得到 $y = \cos 2x$ 的图象，只需要将函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图象 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

【考点】函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ 的图象变换.

【分析】先根据诱导公式将函数 $y = \cos 2x$ 化为正弦形式的. 然后假设平移 ϕ 个单位得到，根据 $\sin[2(x + \phi) - \frac{\pi}{6}] = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ 解出 ϕ 即可.

【解答】解： $\because y = \cos 2x = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$

假设只需将函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象平移 ϕ 个单位得到，则： $\sin\left[2\left(x+\phi\right) - \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ ，
 $\therefore 2\left(x+\phi\right) - \frac{\pi}{6} = 2x + \frac{\pi}{2}$ ， $\phi = \frac{\pi}{3}$ ，
 故应向左平移个单位 $\frac{\pi}{3}$ 。

故选：D。

【点评】 本题主要考查三角函数的诱导公式和平移变换。三角函数的平移变换第一步先将函数化为同名函数，然后根据左加右减上加下减的原则平移。

3. 在下列向量组中，可以把向量 $\vec{a} = (3, 2)$ 表示出来的是 ()

- A. $\vec{e}_1 = (0, 0)$ ， $\vec{e}_2 = (1, 2)$ B. $\vec{e}_1 = (-1, 2)$ ， $\vec{e}_2 = (5, -2)$
 C. $\vec{e}_1 = (3, 5)$ ， $\vec{e}_2 = (6, 10)$ D. $\vec{e}_1 = (2, -3)$ ， $\vec{e}_2 = (-2, 3)$

【考点】 平面向量的基本定理及其意义。

【分析】 根据向量的坐标运算， $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ ，计算判别即可。

【解答】 解：根据 $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ ，

选项 A： $(3, 2) = \lambda(0, 0) + \mu(1, 2)$ ，则 $3 = \mu$ ， $2 = 2\mu$ ，无解，故选项 A 不能；

选项 B： $(3, 2) = \lambda(-1, 2) + \mu(5, -2)$ ，则 $3 = -\lambda + 5\mu$ ， $2 = 2\lambda - 2\mu$ ，解得， $\lambda = 2$ ， $\mu = 1$ ，故选项 B 能。

选项 C： $(3, 2) = \lambda(3, 5) + \mu(6, 10)$ ，则 $3 = 3\lambda + 6\mu$ ， $2 = 5\lambda + 10\mu$ ，无解，故选项 C 不能。

选项 D： $(3, 2) = \lambda(2, -3) + \mu(-2, 3)$ ，则 $3 = 2\lambda - 2\mu$ ， $2 = -3\lambda + 3\mu$ ，无解，故选项 D 不能。

故选：B。

【点评】 本题主要考查了向量的坐标运算，根据 $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ 列出方程解方程是关键，属于基础题。

4. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$, $\cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) =$ ()

- A. $\frac{5}{9}\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】两角和与差的余弦函数.

【分析】利用同角三角函数的基本关系求得 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 和 $\sin(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4})$ 的值, 再利用两角差的正切公式的应用, 求得要求式子的值.

【解答】解: $\because \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$, $\cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{4})} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \sin(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{1 - \cos^2(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4})} = -\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) &= \cos[(\alpha + \frac{\pi}{4}) + (\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4})] = \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}) \\ &\quad - \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot (-\frac{\sqrt{6}}{3}) = \frac{5\sqrt{3}}{9}, \end{aligned}$$

故选: A.

【点评】本题主要考查同角三角函数的基本关系, 两角差的余弦公式的应用, 属于基础题.

5. 根据统计, 一名工人组装第 x 件某产品所用的时间 (单位: 分钟) 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}}, & x < A \\ \frac{c}{\sqrt{A}}, & x \geq A \end{cases} \quad (A, C \text{ 为常数}).$$

已知工人组装第 4 件产品用时 30 分钟, 组

装第 A 件产品用时 15 分钟, 那么 c 和 A 的值分别是 ()

- A. 75, 25 B. 75, 16 C. 60, 25 D. 60, 16

【考点】函数解析式的求解及常用方法.

【分析】首先, $x=A$ 的函数值可由表达式直接得出, 再根据 $x=4$ 与 $x=A$ 的函数值

不相等，说明求 $f(4)$ 要用 $x < A$ 对应的表达式，将方程组联解，可以求出 C 、 A 的值。

【解答】解：由题意可得： $f(A) = \frac{c}{\sqrt{A}} = 15$ ，

所以 $c = 15\sqrt{A}$

而 $f(4) = \frac{c}{\sqrt{4}} = 30$ ，可得出 $\frac{15\sqrt{A}}{2} = 30$

故 $\sqrt{A} = 4$ ，可得 $A = 16$

从而 $c = 15\sqrt{A} = 60$

故答案为 D

【点评】分段函数是函数的一种常见类型，解决的关键是寻找不同自变量所对应的范围，在相应区间内运用表达式加以解决。

6. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x} + \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 落在区间 $(-3, 5)$ 的所有零点之和为 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【考点】函数零点的判定定理。

【分析】由题意别作出函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 与 $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的图象，由图得交点的个数和函数图象的对称性，并利用对称性求出函数 $f(x)$ 的所有零点之和。

【解答】解：由 $f(x) = \frac{1}{1-x} + \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$ 得， $\frac{1}{x-1} = -\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ，

分别作出函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 与 $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的图象如图：

则函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 与 $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的图象关于 $(1, 0)$ 点成中心对称，

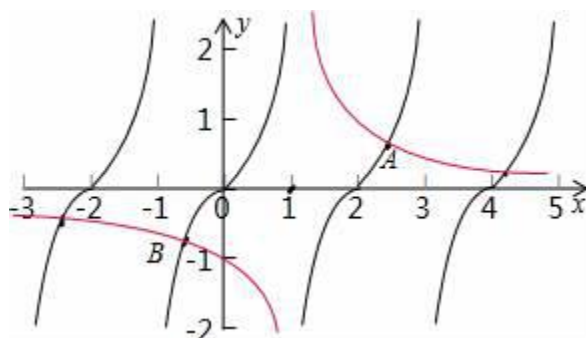
由图象可知两个函数在区间 $(-3, 5)$ 上共有 4 个交点，它们关于 $(1, 0)$ 点成中心对称，

不妨设关于点 $(1, 0)$ 对称的两个点 A、B 的横坐标是 a 、 b ，

则 $\frac{a+b}{2} = 1$ ，即 $a+b=2$ ，

所以所有交点横坐标之和为 $2(a+b) = 4$ ，即所有零点之和为 4，

故选：C。



【点评】本题考查了函数的零点与函数图象交点的转化，掌握数形结合的思想方法和函数的对称性是解题的关键.

7. 函数 $y = \sqrt{\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)}$ 的单调增区间是 ()

- A. $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{6}]$, $k \in \mathbb{Z}$ B. $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi - \frac{\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$
 C. $[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$ D. $[k\pi + \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{11\pi}{12}]$, $k \in \mathbb{Z}$

【考点】正弦函数的图象.

【分析】先求出函数 y 的定义域，再求函数 y 的单调递增区间是什么.

【解答】解：∵ 函数 $y = \sqrt{\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)}$,

$$\therefore \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) \geq 0,$$

$$\text{即 } \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \leq 0,$$

$$\text{解得 } -\pi + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{即 } -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{即 } y \text{ 的定义域是 } [-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{又令 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{即 } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

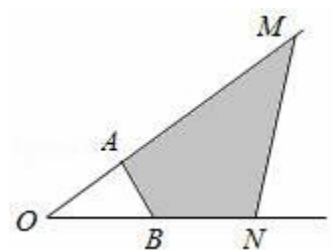
$$\text{解得 } \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{即 } -\frac{7\pi}{12} + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

综上，函数 y 的单调递增区间是 $[-\frac{\pi}{3}+k\pi, -\frac{\pi}{12}+k\pi]$ ， $k \in \mathbb{Z}$ 。

【点评】 本题考查了三角函数的图象与性质的应用问题，也考查了复合函数的单调性问题，是基础题目。

8. 如图， A 、 B 分别是射线 OM 、 ON 上的点，给出下列以 O 为起点的向量：① $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ ；② $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ；③ $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ；④ $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ；⑤ $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ 。其中终点落在阴影区域内的向量的序号有（ ）



A. ①②④ B. ①③ C. ②③⑤ D. ①③⑤

【考点】 向量加减混合运算及其几何意义。

【分析】 作平面向量的线性运算，结合当 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ， $x+y=1$ 时，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ ，则点 C 在线段 AB 上；从而解得。

【解答】 解：由题意作平面向量的线性运算如下，

又 $\because$ 当 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ， $x+y=1$ 时，若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ ，则点 C 在线段 AB 上；

$\therefore \overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$ 的向量的终点在阴影内；

$\because \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$ ；

$\therefore \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ 的向量的终点不在阴影内；

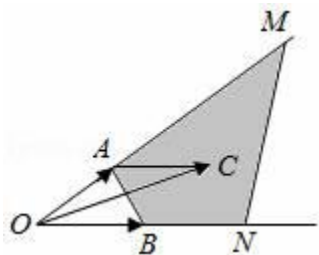
$\because \frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{OB}$ ；

$\therefore \frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ 的向量的终点在阴影内；

$\because \frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{7}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ，

$\therefore \frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ 的向量的终点不在阴影内；

故选 B。



【点评】 本题考查了平面向量的线性运算的应用及数形结合的思想方法应用.

9. 定义在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的函数 $y=6\cos x$ 与 $y=5\tan x$ 的图象交点为 P , 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 P_1 , 直线 PP_1 与 $y=\sin x$ 的图象交于点 P_2 , 则线段 P_1P_2 的长度为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

【考点】 余弦函数的图象; 正切函数的图象.

【分析】 先将求 P_1P_2 的长转化为求 $\sin x$ 的值, 再由 x 满足 $6\cos x=5\tan x$ 可求出 $\sin x$ 的值, 从而得到答案.

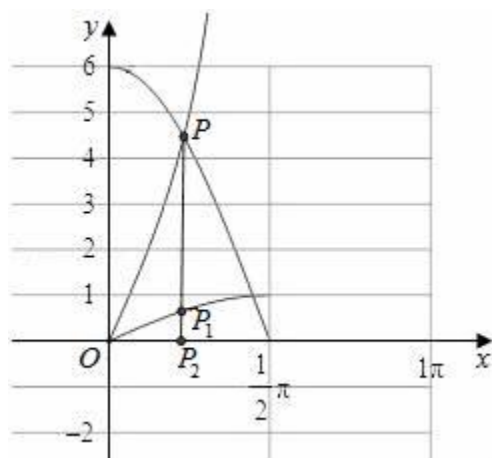
【解答】 解: 作出对应的图象如图,

则线段 P_1P_2 的长即为 $\sin x$ 的值,

且其中的 x 满足 $6\cos x=5\tan x$, 即 $6\cos x=\frac{5\sin x}{\cos x}$, 化为 $6\sin^2 x+5\sin x-6=0$,

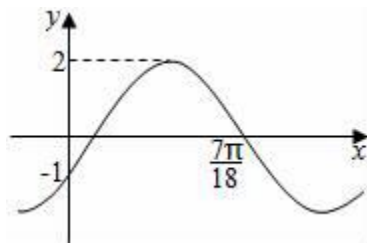
解得 $\sin x=\frac{2}{3}$. 即线段 P_1P_2 的长为 $\frac{2}{3}$

故选: A



【点评】 本题主要考查三角函数的图象和性质, 利用数形结合是解决本题的关键.

10. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ 的部分图象如图所示，则函数的解析式可以是 ()



- A. $f(x) = 2\cos(3x + \frac{2\pi}{3})$
 B. $f(x) = 2\sin(\frac{15}{7}x - \frac{5\pi}{6})$
 C. $f(x) = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$
 D. $f(x) = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 或 $f(x) = 2\sin(\frac{15}{7}x - \frac{5\pi}{6})$

【考点】由 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的部分图象确定其解析式.

【分析】由图形可以求出 A ，根据图象过 $(0, -1)$ ， $(\frac{7\pi}{18}, 0)$ ，把点的坐标代入求出 ω ， ϕ ，从而可得函数解析式.

【解答】解：由图象知 $A=2$ ，点 $(0, -1)$ ， $(\frac{7\pi}{18}, 0)$ 在函数图象上，

$$\therefore 2\sin\phi = -1,$$

$$\therefore \text{可得 } \sin\phi = -\frac{1}{2}, \text{ 可得: } \phi = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, \text{ 或 } \phi = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore 2\sin(\frac{7\pi}{18}\omega + 2k\pi + \frac{7\pi}{6}) = 0, \text{ 或 } 2\sin(\frac{7\pi}{18}\omega + 2k\pi + \frac{11\pi}{6}) = 0,$$

$$\therefore \frac{7\pi}{18}\omega + \frac{7\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ 或 } \frac{7\pi}{18}\omega + \frac{11\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{解得: } \omega = \frac{18k}{7} - 3, \text{ 或 } \omega = \frac{18k}{7} - \frac{33}{7}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore \text{当 } k=2, \omega = \frac{15}{7}, \phi = 4\pi + \frac{7\pi}{6}, \text{ 可得函数的解析式可以是 } f(x) = 2\sin(\frac{15}{7}x + 4\pi + \frac{7\pi}{6})$$

$$= 2\sin(\frac{15}{7}x - \frac{5\pi}{6}).$$

$$\text{当 } k=3, \omega = 3, \phi = 6\pi + \frac{11\pi}{6}, \text{ 可得函数的解析式可以是 } f(x) = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6}).$$

故选：D.

【点评】本题考查由 $y=A\sin(\omega x+\phi)$ 的部分图象确定其解析式，考查分析问题解决问题的能力，解题的关键是初相的求法要注意，属于中档题.

11. 关于 x 的方程 $a\sin x+b\cos x+c=0$ 在 $[0, \pi]$ 上有两个相异实根 α, β , 则 $\sin(\alpha+\beta)$ = ()

- A. $\frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}$ B. $-\frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2}$
C. $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ D. $-\frac{2ab}{a^2+b^2}$

【考点】两角和与差的正弦函数.

【分析】将 α, β 代入方程后相减，然后根据和差化积公式求出 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的值，再由万能公式可得答案.

【解答】解：∵ 方程 $a\sin x+b\cos x+c=0$ 在 $[0, \pi]$ 内有两个相异的实根 α, β ,

$$\therefore a\sin\alpha+b\cos\alpha+c=0 \quad ①$$

$$a\sin\beta+b\cos\beta+c=0 \quad ②$$

$$\therefore \text{方程} ① - ② \text{得 } a(\sin\alpha - \sin\beta) + b(\cos\alpha - \cos\beta) = 0,$$

$$\text{即 } a \times \left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - b \left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0,$$

$$\therefore 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \left(a\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0,$$

$$\because \alpha \neq \beta, \therefore \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0,$$

$$\therefore a\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - b\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0, \text{ 则 } \tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a}{b},$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta) = \frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

故选：C.

【点评】本题主要考查和差化积公式和万能公式的应用. 三角函数部分公式比较多，要强化记忆，是中档题.

12. 函数 $f(x) = \sin 2x + 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}$, $g(x) = m\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 2m + 3$ ($m > 0$),

若对任意 $x_1 \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 存在 $x_2 \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 使得 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(1, \frac{4}{3})$ B. $(\frac{2}{3}, 1]$ C. $[\frac{2}{3}, 1]$ D. $[1, \frac{4}{3}]$

【考点】三角函数中的恒等变换应用.

【分析】分别由三角函数求各自函数的值域, 由集合的包含关系解不等式组可得.

【解答】解: $\because f(x) = \sin 2x + 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}$

$$= \sin 2x + \sqrt{3}(2\cos^2 x - 1) = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$$

$$= 2(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$$

$$\text{当 } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}],$$

$$\therefore f(x)_{\min} = 2\sin \frac{5\pi}{6} = 1, \therefore f(x) \in [1, 2],$$

$$\text{对于 } g(x) = m\cos(2x - \frac{\pi}{6}) - 2m + 3 \quad (m > 0),$$

$$2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}], \quad m\cos(2x - \frac{\pi}{6}) \in [\frac{m}{2}, m],$$

$$\therefore g(x) \in [-\frac{3}{2}m + 3, 3 - m],$$

$$\because \text{对任意 } x_1 \in [0, \frac{\pi}{4}], \text{ 存在 } x_2 \in [0, \frac{\pi}{4}], \text{ 使得 } g(x_1) = f(x_2) \text{ 成立,}$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{3}{2}m + 3 \geq 1 \\ 3 - m \leq 2 \end{cases}, \text{ 解得实数 } m \text{ 的取值范围是 } [1, \frac{4}{3}].$$

故选: D.

【点评】本题考查三角函数恒等变换, 问题转化为求三角函数的值域并利用集合关系是解决问题的关键, 属中档题.

二、填空题

13. 扇形 AOB 周长为 8, 圆心角为 2 弧度, 则其面积为 4.

【考点】扇形面积公式.

【分析】直接利用扇形的面积公式进行求解即可.

【解答】解: 设扇形的半径为 r , 弧长为 l , 则

扇形的周长为 $l + 2r = 8$,

∴弧长为: $\alpha r = 2r$,

∴ $r=2$,

根据扇形的面积公式, 得 $S = \frac{1}{2} \alpha r^2 = 4$,

故答案为: 4.

【点评】本题重点考查了扇形的面积公式, 属于基础题.

14. 已知 $\log_2 3 = t$, 则 $\log_{48} 54 = \frac{1+3t}{4+t}$ (用 t 表示)

【考点】换底公式的应用; 对数的运算性质.

【分析】利用对数的换底公式化简求解即可.

【解答】解: $\log_2 3 = t$, 则 $\log_{48} 54 = \frac{\log_2 54}{\log_2 48} = \frac{1+3\log_2 3}{4+\log_2 3} = \frac{1+3t}{4+t}$.

故答案为: $\frac{1+3t}{4+t}$.

【点评】本题考查换底公式的应用, 对数运算法则的应用, 考查计算能力.

15. 已知函数 $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$) 是区间 $[\frac{3}{4}\pi, \pi]$ 上的增函数, 则 ω 的取值范围是 $(0, \frac{3}{4}]$.

【考点】正弦函数的图象.

【分析】可以通过角的范围 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$, 得到 $(\omega x + \frac{\pi}{4})$ 的取值范围, 直接推导 ω 的范围即可.

【解答】解: 由于 $x \in [\frac{3}{4}\pi, \pi]$,

故 $(\omega x + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{3\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{4}, \pi\omega + \frac{\pi}{4}]$,

∵函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$) 在 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 上是增函数,

$$\therefore \begin{cases} \frac{3\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{4} \geq -\frac{\pi}{2} \\ \pi\omega + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \\ \omega > 0 \end{cases},$$

$$\therefore 0 < \omega \leq \frac{3}{4},$$

故答案为: $(0, \frac{3}{4}]$.

【点评】 本题考查三角函数的单调性的应用, 函数的解析式的求法, 考查计算能力.

16. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$, 若对任意的 $x \in [t, t+2]$, 不等式 $f(x+t) \geq 2f(x)$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是 $[\sqrt{2}, +\infty)$.

【考点】 函数恒成立问题; 函数奇偶性的性质.

【分析】 由当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$, 函数是奇函数, 可得当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2$, 从而 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是单调递增函数, 且满足 $2f(x) = f(\sqrt{2}x)$, 再根据不等式 $f(x+t) \geq 2f(x) = f(\sqrt{2}x)$ 在 $[t, t+2]$ 恒成立, 可得 $x+t \geq \sqrt{2}x$ 在 $[t, t+2]$ 恒成立, 即可得出答案.

【解答】 解: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2$

$\because$ 函数是奇函数

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases},$$

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是单调递增函数,

且满足 $2f(x) = f(\sqrt{2}x)$,

$\because$ 不等式 $f(x+t) \geq 2f(x) = f(\sqrt{2}x)$ 在 $[t, t+2]$ 恒成立,

$\therefore x+t \geq \sqrt{2}x$ 在 $[t, t+2]$ 恒成立,

即: $x \leq (1+\sqrt{2})t$ 在 $[t, t+2]$ 恒成立,

$\therefore t+2 \leq (1+\sqrt{2})t$

解得: $t \geq \sqrt{2}$,

故答案为: $[\sqrt{2}, +\infty)$.

【点评】 本题考查了函数恒成立问题及函数的奇偶性, 难度适中, 关键是掌握函数的单调性与奇偶性.

三、解答题（共 6 题，共 70 分）

17. （10 分）（2015 秋•武汉校级期末）已知向量 $\vec{a} = (\sin\alpha, \frac{3}{2})$ ， $\vec{b} = (\cos\alpha, -1)$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

（1）若 α 为第二象限角，求 $\frac{\sin(-\alpha - \frac{\pi}{2})\cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha)\tan(\pi - \alpha)}{\tan(-\alpha - \pi)\sin(-\pi - \alpha)}$ 的值；

（2）求 $\cos^2\alpha - \sin 2\alpha$ 的值.

【考点】三角函数的化简求值；平面向量共线（平行）的坐标表示；同角三角函数基本关系的运用.

【分析】（1）通过向量的共线求出正切函数值，利用诱导公式化简已知条件然后求解即可.

（2）化简表达式为正切函数的形式，然后求解即可.

【解答】解：向量 $\vec{a} = (\sin\alpha, \frac{3}{2})$ ， $\vec{b} = (\cos\alpha, -1)$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，

可得 $-\sin\alpha = \frac{3}{2}\cos\alpha$ ，可得 $\tan\alpha = -\frac{3}{2}$ ，

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\sin(-\alpha - \frac{\pi}{2})\cos(\frac{3}{2}\pi + \alpha)\tan(\pi - \alpha)}{\tan(-\alpha - \pi)\sin(-\pi - \alpha)} = \frac{\cos\alpha \sin\alpha \tan\alpha}{\tan\alpha \sin\alpha} = \cos\alpha = - \\ & \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{9}{4}}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}. \end{aligned}$$

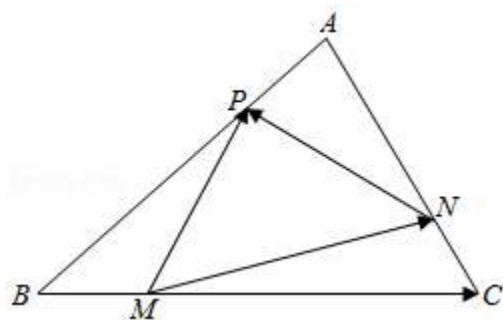
$$(2) \quad \cos^2\alpha - \sin 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1 - 2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1 - 2 \times (-\frac{3}{2})}{1 + \frac{9}{4}} = \frac{16}{13}.$$

【点评】本题考查诱导公式以及向量的共线，三角函数的化简求值，考查计算能力.

18. （10 分）（2015 秋•武汉校级期末）如图，M、N、P 分别是三角形 ABC 三边 BC、CA、AB 上的点，且满足 $\frac{AP}{AB} = \frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{4}$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

（1）用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$ ；

（2）若点 G 是三角形 MNP 的重心，用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AG}$.



【考点】向量的线性运算性质及几何意义；平面向量的基本定理及其意义.

【分析】(1) 根据向量加法、减法及数乘的几何意义便可由条件及图形便可用 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示出 $\overrightarrow{MN} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$;

(2) 先得出 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$, 然后画出图形, 并连接 AG, MG, 根据 G 为三角形 MNP 的重心便可得到 $\overrightarrow{MG} = -\frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b}$, 从而根据 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MG}$ 便可由 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示出 $\overrightarrow{AG}$.

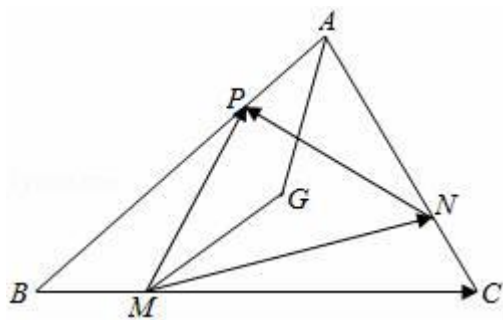
【解答】解: (1) 根据条件, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} \\
 &= \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\
 &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
 &= -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b};
 \end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$, 如图, 连接 AG, MG;

G 为三角形 MNP 的重心, 则: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP})$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}\right) = -\frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b}; \\
 \therefore \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MG} \\
 &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{12}\vec{b} \\
 &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.
 \end{aligned}$$



【点评】考查向量加法、减法及数乘的几何意义，向量的数乘运算，以及三角形重心的概念和性质，向量加法的平行四边形法则.

19. (12 分) (2015 秋•武汉校级期末) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\phi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的最小值为 -2 , 其相邻两条对称轴距离为 $\frac{\pi}{2}$, 函数图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 单位后所得图象对应的函数为偶函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(\frac{x_0}{2}) = -\frac{3}{8}$, 且 $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, 求 $\cos(x_0 + \frac{\pi}{6})$ 的值.

【考点】函数 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的图象变换.

【分析】(1) 由最值求得 A , 由周期性求得 ω , 再根据函数 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的图象变换规律, 三角函数的奇偶性, 求得 ϕ , 可得函数的解析式.

(2) 由条件求得 $\sin(x_0 + \frac{\pi}{3})$ 和 $\cos(x_0 + \frac{\pi}{3})$ 的值, 再利用两角差的余弦公式, 求得 $\cos(x_0 + \frac{\pi}{6}) = \cos(x_0 + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})$ 的值.

【解答】解: (1) 根据函数的最小值为 -2 , 可得 $A = 2$,

再根据其相邻两条对称轴距离为 $\frac{\pi}{2}$, 可得 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$, $\therefore \omega = 2$,

故函数 $f(x) = 2\sin(2x + \phi)$.

结合函数图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 单位后, 所得图象对应的函数 $y = 2\sin[2(x + \frac{\pi}{12}) + \phi]$

$= 2\sin(2x + \frac{\pi}{6} + \phi)$ 为偶函数,

$\therefore \frac{\pi}{6} + \phi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即 $\phi = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

结合, $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$, 可得 $\phi = \frac{\pi}{3}$, $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 若 } f\left(\frac{x_0}{2}\right) &= 2\sin\left(x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{8}, \therefore \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{16}. \\
 \because x_0 &\in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \therefore \left(x_0 + \frac{\pi}{3}\right) \in \left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right], \therefore \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{1 - \sin^2\left(x_0 + \frac{\pi}{3}\right)} = \\
 &= -\frac{\sqrt{247}}{16}. \\
 \therefore \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\left(x_0 + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{6} \\
 &= -\frac{\sqrt{741}}{32} - \frac{3}{32}.
 \end{aligned}$$

【点评】 本题主要考查由函数 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的部分图象求解析式，函数 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的图象变换规律，三角函数的奇偶性，两角和差的余弦公式的应用，属于中档题.

20. (12 分) (2015 秋•武汉校级期末) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = 2\cos\omega x \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$) 的周期为 π .

(1) 求 ω 的值及 $f(x)$ 的单调增区间;

(2) 记 $g(x) = f(x) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 求 $g(x)$ 的值域.

【考点】 三角函数中的恒等变换应用; 正弦函数的图象.

【分析】 利用两角和差化积公式, 将 $f(x)$ 转换为 $\sin(2\omega x + \pi/6)$ 的形式, 在利用 $T = 2\pi/2\omega$, 求出 ω 的值, 求 $g(x)$ 主要根据诱导公式转换为 $\sin(x - \pi/6)$ 的形式,

在构造二次函数, 求出二次函数的定义域, 根据函数的对称性求出函数的最值.

$$\begin{aligned}
 \text{【解答】解: 由函数 } f(x) &= 2\cos\omega x \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + \frac{1}{2} \cos 2\omega x \\
 &= \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right),
 \end{aligned}$$

由函数的周期 $T = \pi$,

$$\therefore \omega = 1,$$

函数的单调递减时, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$),

$\therefore$ 函数的单调递减区间 $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 由 } g(x) &= \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{6}) \\
 &= \sin[2(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{2}] + \sin(x - \frac{\pi}{6}) \\
 &= \cos 2(x - \frac{\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{6}) \\
 &= 1 - 2\sin^2(x - \frac{\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{6}) \\
 \text{设 } \sin(x - \frac{\pi}{6}) &= t \text{ 则: } g(x) = 1 - 2t^2 + t, \quad -1 \leq t \leq 1
 \end{aligned}$$

由二次函数图象可知：函数在 $x = \frac{1}{4}$ 取最大值为 $\frac{9}{8}$ ，当 $x = -1$ 时取最小值为 -2 ；

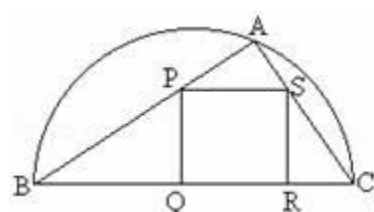
$\therefore$ 函数的取值范围为 $[-2, \frac{9}{8}]$

【点评】 本题考查了积化和差公式，求三角函数的周期，利用诱导公式转换成相同函数的不同次幂的形式，再构造二次函数，求二次函数的值域，构造二次函数时要注意，函数的定义域的取值范围。属于中档题。

21. (13 分) (2015 秋•武汉校级期末) 如图，某园林单位准备绿化一块直径为 BC 的半圆形空地， $\triangle ABC$ 外的地方种草， $\triangle ABC$ 的内接正方形 PQRS 为一水池，其余的地方种花。若 $BC = a$ ， $\angle ABC = \theta$ ，设 $\triangle ABC$ 的面积为 S_1 ，正方形 PQRS 的面积为 S_2 。

(1) 用 a ， θ 表示 S_1 和 S_2 ；

(2) 当 a 为定值， θ 变化时，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值，及此时的 θ 值。



【考点】 在实际问题中建立三角函数模型。

【分析】 (1) 据题三角形 ABC 为直角三角形，利用三角函数分别求出 AC 和 AB，得出三角形 ABC 的面积 S_1 ；

设正方形 PQRS 的边长为 x ，利用三角函数分别表示出 BQ 和 RC，由 $BQ + QR + RC = a$ 列出方程求出 x ，算出 S_2 ；

(2) 化简比值 $\frac{S_1}{S_2}$, 设 $t = \sin 2\theta$ 来化简求出 S_1 与 S_2 的比值, 利用三角函数的增减

性求出比值的最小值以及对应此时的 θ .

【解答】解: (1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB = a\cos\theta$, $AC = a\sin\theta$,

$$\text{所以 } S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} a^2 \sin\theta \cos\theta;$$

设正方形的边长为 x 则 $BP = \frac{x}{\sin B}$, $AP = x\cos\theta$,

$$\text{由 } BP + AP = AB, \text{ 得 } \frac{x}{\sin\theta} + x\cos\theta = a\cos\theta,$$

$$\text{解得 } x = \frac{a\sin\theta \cos\theta}{1 + \sin\theta \cos\theta};$$

$$\text{所以 } S_2 = x^2 = \left(\frac{a\sin\theta \cos\theta}{1 + \sin\theta \cos\theta} \right)^2; \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + \sin\theta \cos\theta)^2}{\sin\theta \cos\theta}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2}{\sin 2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin 2\theta} + \frac{1}{4}\sin 2\theta + 1, \quad (8 \text{ 分})$$

令 $t = \sin 2\theta$, 因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

所以 $0 < 2\theta < \pi$, 则 $t = \sin 2\theta \in (0, 1]$, (10 分)

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{4}t + 1;$$

$$\text{设 } g(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{4}t + 1,$$

$$\text{则 } g'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{4}, \quad t \in (0, 1];$$

所以函数 $g(t)$ 在 $(0, 1]$ 上递减, (11 分)

$$\text{因此当 } t=1 \text{ 时 } g(t) \text{ 有最小值 } g(t)_{\min} = g(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{9}{4},$$

此时 $\sin 2\theta = 1$, 解得 $\theta = \frac{\pi}{4}$;

所以当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{S_1}{S_2}$ 的值最小, 最小值为 $\frac{9}{4}$.

【点评】本题考查了根据实际问题选择合适的函数关系的能力，以及在实际问题中建立三角函数模型的能力，是综合性题目.

22. (13分) (2015秋•武汉校级期末) 已知函数 $y=x+\frac{a}{x}$ 有如下性质：当 $a>0$ 时，函数在 $(0, \sqrt{a}]$ 单调递减，在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 单调递增. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = |t(x+\frac{4}{x}) - 5|$ ，其中 $t>0$.

(1) 若函数 $f(x)$ 分别在区间 $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调，求 t 的取值范围

(2) 当 $t=1$ 时，若方程 $f(x) - k=0$ 有四个不相等的实数根 x_1, x_2, x_3, x_4 ，求 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围

(3) 当 $t=1$ 时，是否存在实数 a, b 且 $0<a<b\leq 2$ ，使得 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的取值范围是 $[ma, mb]$ ，若存在，求出实数 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

【考点】函数单调性的判断与证明.

【分析】(1) 由题意得 $4t - 5 \geq 0$ ，由此能求出 t 的取值范围.

(2) 设 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，则 x_1, x_4 是方程 $(x - \frac{4}{x}) - 5 - k = 0$ 的两个根， x_2, x_3 是方程 $-(x + \frac{4}{x}) + 5 - k = 0$ 的两根，由此能求出 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的范围.

(3) 令 $f(x) = 0$ ，得 $x=1$ 或 $x=4$ ，推导出 $0 < a < b < 1$ 或 $1 < a < b \leq 2$. 由此利用分类讨论思想和构造法能求出存在满足条件的 a, b ，此时 m 的取值范围是 $[\frac{1}{2}, \frac{9}{16})$.

【解答】解：(1) 由题意得 $y=t(x+\frac{4}{x}) - 5$ 在 $(0, 2]$ 递减，取值范围是 $[4t - 5, +\infty)$ ，

在 $[2, +\infty)$ 递增，取值范围是 $[4t - 5, +\infty)$ ，

$\therefore 4t - 5 \geq 0$ ，解得 $t \geq \frac{5}{4}$ ，

$\therefore t$ 的取值范围是 $[\frac{5}{4}, +\infty)$.

(2) $t=1$ 时，方程有四个不等实数根 x_1, x_2, x_3, x_4 ，设 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，

则 x_1, x_4 是方程 $(x - \frac{4}{x}) - 5 - k = 0$ 的两个根,

整理, 得 $x^2 - (5+k)x + 4 = 0$, $\therefore x_1 + x_4 = 5 + k$,

同理, x_2, x_3 是方程 $-(x + \frac{4}{x}) + 5 - k = 0$ 的两根,

整理, 得 $x^2 - (5 - k)x + 4 = 0$, $\therefore x_3 + x_4 = 5 - k$,

$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$.

(3) 令 $f(x) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = 4$,

由 $a < b$, $ma < mb$, 得 $m > 0$,

若 $1 \in [a, b]$, 则 $ma = 0$, 矛盾.

故 $0 < a < b < 1$ 或 $1 < a < b \leq 2$.

当 $0 < a < b < 1$ 时, $f(a) = mb$, $f(b) = ma$,

$$\begin{cases} a + \frac{4}{a} - 5 = mb \\ b + \frac{4}{b} - 5 = ma \end{cases}, \text{消 } m, \text{得 } a + b = 5, \text{矛盾.}$$

当 $1 < a < b \leq 2$ 时, $f(a) = ma$, $f(b) = mb$,

$$\begin{cases} -a - \frac{4}{a} + 5 = ma \\ -b - \frac{4}{b} + 5 = mb \end{cases}, \text{即 } a, b \text{ 是方程 } (m+1)x^2 - 5x + 4 = 0 \text{ 在 } (1, 2] \text{ 上两个不等根,}$$

记 $g(x) = (m+1)x^2 - 5x + 4$,

$$\text{则 } \begin{cases} g(1) > 0 \\ g(2) > 0 \\ 25 - 16(m+1) > 0 \\ 1 < \frac{5}{2(m+1)} < 2 \end{cases}, \text{解得 } \frac{1}{2} \leq m < \frac{9}{16},$$

综上所述, 存在满足条件的 a, b , 此时 m 的取值范围是 $[\frac{1}{2}, \frac{9}{16})$.

【点评】 本题考查实数的取值范围的求法, 是中档题, 解题时要认真审题, 注意分类讨论思想、构造法、函数性质的合理运用.