

# 《等比数列的前 $n$ 项和》教学设计

## 一、教材分析

等比数列的前  $n$  项和人教 B 版教科书必修 5 第二章 2.3.2 的内容。是高中数学新教材的一个重要问题，等比数列的前  $n$  项和不但是“等差数列及其前  $n$  项和”与“等比数列”内容的延续、也与函数等知识有着密切的联系，具有承上启下的作用。通过这部分内容的学习，可以帮助学生更好的理解特殊到一般、类比与转化、分类讨论的思想。有助于提升学生的创新思维和探索精神，是培养学生应用意识和数学能力的良好载体。

## 二、学情分析

**认知：**学生已经学习了等差数列、等差数列的前  $n$  项和、等比数列，掌握了等差数列和等比数列的部分知识。

**能力：**学生已经具备一定的自学能力，初步具备运用知识解决问题的能力；但对知识的整合能力、问题的探究能力及思维的严密性上还需要进一步培养和提高。

**情感：**多数同学学习兴趣比较浓，积极性较强，但合作交流的意识等方面尚有待加强。

从认知、能力和情感态度三个方面分析学生的基础、优势和不足，它是制定教学目标的重要依据。

## 三、教学目标

**1，知识与技能：**理解等比数列的前  $n$  项和公式及公式的推导过程；掌握等比数列前  $n$  项和公式的推导方法；并能运用公式解决一些简单的问题。通过公式的灵活运用，进一步渗透递推的思想、方程的思想、分类讨论的思想、等价转化的思想。

**2，过程与方法：**通过公式的推导，培养学生观察、分析、类比、猜想、归纳、综合的能力，提高学生的探究问题、思考问题、分析与解决问题的能力，体会公式探求过程中从特殊到一般的思维方法，加强类比与转化、分类讨论等数学思想的培养，进一步渗透方程的思想。

**3，情感、态度与价值观：**通过从特殊到一般的认识过程，使学生受到辩证唯物主义思想的熏陶；体验数学发现和创造的历程，体验到思考与探索的乐趣，增进对数学应用价值的认识；并且培养了实事求是的科学态度、合作交流的个性品质；敢于创新的科学精神。

## 四、教学重点、难点

**教学重点：**等比数列的前  $n$  项和公式及其推导过程。

**教学难点：**等比数列的前  $n$  项和的公式的多种推导方法以及公式的深入挖掘。

## 五、学法与教法

**学法：**本节课采用讲解与练习相结合作为主体，适当穿插交流讨论的活动形式，利用多媒体课件提高教学的直观性和趣味性，以分组小讨论的形式激活学习气氛，配以直观完整的板书设计来突出本节教材的重难点

**教学用具：**电脑、多媒体、粉笔，黑板。

**教法：**类比法，启发引导法，探究法

- 1, **新课引入**: 提出设计好的问题, 创设情境, 调动学生的兴趣, 激发学生的求知欲望。
- 2, **问题探究**: 根据得到的结论, 如何总结出可以应用的公式。
- 3, **提出疑问**: 探究的得到的结论能不能适用于所有情况。
- 4, **讲解分析**: 带着问题来讲解解题思路, 解题技巧, 渗透分类的思想, 方程的思想等, 并分析该公式适用的情况。
- 5, **巩固提高**: 从一些简单的例题出发, 进一步巩固学生对于等比数列的前  $n$  项和公式的理解。
- 6, **触类旁通**: 通过对  $1-x^n$  进行因式分解, 结合公式进一步分析, 得出公式中隐含的因式分解公式。
- 7, **布置作业**: 书后针对性的习题。

## 六、教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计思路
创设情景	<p>旧课复习: 我们学过的等比数列定义和通项公式, 关键在于每一项与前一项的比是一个固定的常数。</p> <p>例题引入: 1, 已知等比数列 <math>\{a_n\}</math> 的公比为 2, 且 <math>a_1 + a_2 + a_3 = 7</math>, 求 <math>a_2 + a_3 + a_4 = ?</math></p> <p>2, 已知等比数列 <math>\{a_n\}</math> 的公比为 2, 且 <math>a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5</math>, 求 <math>a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = ?</math></p> <p>3, 已知等比数列 <math>\{a_n\}</math> 的公比为 <math>q</math>, 且 <math>a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = X</math>,</p> <p>并且 <math>a_2 + a_3 + \dots + a_n = Y</math>,</p> <p>那么 <math>X</math> 和 <math>Y</math> 满足什么关系?</p>	<p>通过几道小 题的引入, 学生 能从中发现教师 希望得到的规律, 并能将这种 规律加以延续。</p>	<p>用精心设计的 习题吸引学生的 注意力, 激发学生 求知欲, 锻炼学生 归纳, 类比, 分析的能力, 也是 本节课的教学重 难点之一。</p>
	<p>提出问题: 从例题中能不能找出什么规律? 如果能, 请尝试把这种规律公式化。</p>	<p>提出问题, 由特 殊到一般, 能不 能把这种规律公 式化?</p>	<p>由特殊到一 般, 锻炼学生 的总结归纳能力。</p>

	<p>再提出问题：结合着我们刚才的计算，试着用 <math>a_1, q, n</math> 表示一下等比数列的前 <math>n</math> 项和？</p> $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = ?$	<p>锻炼学生的自我分析，归纳总结能力</p>	<p>培养学生的类比思想</p>
	<p>1, 方程思想:</p> $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$ $= a_1 + q(a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2})$ $= a_1 + qS_{n-1}$ $= a_1 + q(S_n - a_1q^{n-1})$ $\therefore S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ <p>分析：注意 <math>1-q</math> 不能等于 0.</p> $\therefore S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & q \neq 1 \\ na_1 & q = 1 \end{cases}$	<p>利用刚才的习题可以很容易的总结出这种方程思想，方程思想是高中数学学习最重要的部分之一</p>	<p>锻炼学生对于方程思想的理解和应用。</p>
	<p>2, 错位相减:</p> $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$ $qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$ $\therefore (1-q)S_n = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$ $\therefore S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ <p>分析：注意 <math>1-q</math> 不能等于 0.</p> $\therefore S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & q \neq 1 \\ na_1 & q = 1 \end{cases}$	<p>错位相减法：从等比数列的通项公式入手，注意到了各项之间的关系，我们总结公式的目的就是如何消除省略号部分，使之变成准确的代数式。但是在化简公式的过程中要注意分母不为零的条件。</p>	<p>结合已有的理论，联系学生自己的思路，将最困难联想的错位相减法尝试推导出来。</p>

	<p>这种推导公式的方法不仅仅适用于等比数列求和，它还适用于通项公式形如 <math>a_n = nq^n</math> 等数列，至于错位相减法适用范围的具体变化和研究，是我们下节课讲解的重点。</p>		
<p style="writing-mode: vertical-rl; text-orientation: upright;">教学参考</p>	<p>3, 累加求和: (方程思想) 由等比数列的定义可知:</p> $a_2 = a_1q$ $a_3 = a_2q$ $a_4 = a_3q$ <p>.....</p> $a_{n-1} = a_{n-2}q$ $a_n = a_{n-1}q$ <p>将这 <math>n-1 (n \geq 2)</math> 个式子两边分别相加, 可得:</p> $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1})q$ <p>即: <math>S_n - a_1 = (S_n - a_n)q</math></p> $\therefore S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ <p>分析: 注意 <math>1-q</math> 不能等于 0.</p> $\therefore S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & q \neq 1 \\ na_1 & q = 1 \end{cases}$	<p>累加求和是这些推导方法中最易于想象的, 而且在累加之后得到的等式中, 进一步体现了方程的思想。在化简的过程中要注意分母不为零的条件。</p>	<p>从已经掌握的知识入手, 来探索未知领域的问题, 学以致用, 在解决新知识的同时要善于与已经掌握的知识挂钩。更要学会善于利用方程思想, 方程思想贯穿整个高中数学的始终。</p>

<p style="text-align: center;">教学参考</p>	<p>4, 合比定理: 根据等比数列的定义:</p> $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ $\therefore \frac{a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}} = q$ $\therefore \frac{S_n - a_1}{S_n - a_n} = q$ $\therefore (1-q)S_n = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$ $\therefore S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ <p>分析: 1, 注意此方法不适用于 <math>n</math> 为奇数, <math>q = -1</math> 的情况。(分母此时为 0)</p> <p>2, 注意 <math>1-q</math> 不能等于 0.</p> $\therefore S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} & q \neq 1 \\ na_1 & q = 1 \end{cases}$	<p>利用初中的知识去解题, 是我们要注意知识之间横向和纵向的联系, 但是在除了在化简的过程中分母不为零的条件之外, 还要注意到这种方式还不适用于 <math>n</math> 为奇数, <math>q \neq 1</math> 的情况。</p>	<p>帮助学生看到知识点之间的联系, 有助于知识的重组和迁移, 寻找不同实际背景下的数学共性, 尽可能的把所掌握的知识用到解题中来。</p>
<p style="text-align: center;">回顾例题</p>	<p>现在我们回顾一下书上的例题: 印度舍罕王打算重赏国际象棋发明人——大臣达依尔。达依尔说: “陛下, 请您在这张棋盘上的第 1 格内, 赏给我 1 粒麦子, 在第 2 格内给 2 粒, 第 3 格内给 4 粒, 照这样下去, 各小格内的麦粒都是前 1 小格的 2 倍, 陛下, 把这样摆满棋盘的所有 64 格麦粒, 都赏给您的仆人吧!”。假设小麦 1000 粒重 40 克, 那么国王要给发明者大约多少吨小麦? 按照我们刚刚得出的公式来分析, 这是一个首项为 1, 公比为 2, 项数为 64 的等比数列求和问题。 全部麦子的数目:</p> $S_{64} = \frac{1 \times (1 - 2^{64})}{1 - 2} = 18446744073709551615$ $\approx 1.84 \times 10^{19}$	<p>根据已经推导出来的公式来计算书上的例题, 并且与实际情况相联系, 让学生能更容易的理解等比数列前 <math>n</math> 项和的意义</p>	<p>通过例题结论的分析, 理论结合实际, 更容易巩固学生对新知识的印象。</p>

	<p>假设小麦 1000 粒重 40 克,那么总质量约为 7379 亿吨。</p> <p>这些麦子究竟有多少? 打个比方,如果造一个仓库来放这些麦子,仓库高 4 公尺,宽 10 公尺,那么仓库的长度就等于地球到太阳的距离的两倍。而要生产这么多的麦子,全世界要两千年。</p>		
<p style="writing-mode: vertical-rl; text-orientation: upright;">联想归纳</p>	<p>在推导公式的过程中,我们发现这种 <math>a^n - 1</math> 的情况好像我们在初中的因式分解部分学习过,它们到底会不会有什么关系呢,我们举两个例子来看:</p> $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$ $a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$ $= (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$ $= (a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1)$ <p>那么 <math>a^5 - 1 = ?</math></p> <p>我们可以尝试猜测结论</p> $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$ <p>这个结论如何证明,我们看看和本堂课的知识有什么联系。</p> $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ $= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$ $= a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1})$ <p>因为 <math>a_1 \neq 0</math>, 当我们把两侧的 <math>a_1</math> 消去可以得到:</p> <p>两边整理一下可得:</p> $(q^n - 1) = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1)$	<p>利用验证刚才的猜测,联想到曾经学习过的因式分解公式,发现各个等式之间的联系,尝试猜测结论,结合本节课知识,发现等比数列前 n 项和公式中隐藏着的因式分解公式。但是要注意前提,这个公式仅能揭示这种分解的第一步,分解出来的结果是否能继续分解,与该因式本身有关。</p>	<p>锻炼学生发现和总结的能力,从新学习的东西中尽可能的去挖掘更深一层的意义。感受到数学中的创造美。这个例子提示我们,在研究任何问题的时候,除了要注意我们的目标之外,还要留意过程和结果,看看是否能在期中发现另外的结论。</p>

<p>循序渐 进、延 伸拓 展</p>	<p>例题： 1, 已知等比数列的首项 <math>a_1 = 3</math>，公比 <math>q = 2</math>，求 <math>S_5</math>。 2, 中 <math>a_1 = \frac{3}{2}</math>，<math>q = \frac{1}{2}</math>，<math>a_n = \frac{3}{64}</math>，求 <math>n</math>，<math>S_n</math>。 3, 已知等比数列 <math>q = 2</math>，<math>a_6 = 64</math>，求 <math>S_6</math>。 4, 已知等比数列 <math>a_1 = 2</math>，<math>a_5 = 32</math>，求 <math>S_5</math>。 (讨论) 5, 求值 <math>1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n</math>。(讨论) 思考： 1, 求数列 <math>1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 3\frac{1}{8}, 4\frac{1}{16}, \dots</math> 的前 <math>n</math> 项和。 2, 求数列 <math>1 \cdot 2, 2 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, 4 \cdot 2^4, 5 \cdot 2^5, \dots</math> 的前 <math>n</math> 项和。</p>	<p>通过几道简单的练习来巩固对公式的理解，并且通过第 3 题学习并掌握分类求和的方法，通过第 4 题进一步加深错位相减法的印象，并尝试总结错位相减法适用的范围。</p>	<p>渗透方程思想. 通过公式的正用和逆用进一步提高学生运用知识的能力. 加强学生对于新问题的分析和理解能力. 增加思维的梯度的同时, 提高学生的模式识别能力, 渗透转化思想.</p>
<p>归 纳 总 结</p>	<p>1, 等比数列的公式 2, 推导等比数列公式时所运用的思想方法。 3, 学习用多种方法解题。 4, 注意联想与类比。 5, 错位相减法的应用范围。</p>	<p>让学生自己小结, 不仅仅总结知识更重要地是总结数学思想方法。</p>	<p>让学生自己形成知识模块, 从知识的归纳延伸到思想方法的提炼, 优化学生的认知结构, 养成良好的学习习惯</p>
<p>作 业 安 排</p>	<p>1, P51 练习 B。 2, P51 习题 2-3A: 3, 7, 9。 3, P51 习题 2-3B: 4</p>	<p>作业的目的是让学生能在不断的练习中对新知识加以巩固, 并且在具体问题中对自己加以反思, 取得更大的提高。</p>	
<p>板 书 设 计</p>	<p>见后面</p>	<p>板书设计清楚整洁, 便于突出知识目标</p>	

## 七、评价分析

本节课，由实现布置的例题引入，让学生总结答案，猜想公式，对结果加以联想类比，验证自己的猜想正确与否，并尝试对结论加以证明，在教师的讲解中尽可能的使用多种方法，并在讲解过程中对方法进行总结归纳，并且渗透方程的思想，让学生从多方面，多角度去认识问题，通过逐步提高练习的难度让学生学会类比联想，并且逐步渗透转化思想，打破学生原有的认知平衡，让学生的认知结构在“平衡——不平衡——新的平衡”的循环中得到不断的丰富、提高和发展。并且教师在这一过程中要成为学生的帮助者，激发学生的学习兴趣，帮助学生形成学习动机。并且要坚持以“等比数列的前  $n$  项和”为中心，形成知识模块，通过对公式的讲解，从知识、方法、思想三个方面简要回顾，形成知识网络，便于信息的储存和提取。同时还要突出核心概念，强化思想方法。

### (附) 板书设计

<b>等比数列的前 <math>n</math> 项和</b>	
一、例题引入 二、总结公式 三、证明公式 四、归纳小结 五、作业安排	<div style="border: 1px solid black; width: 150px; height: 80px; margin: 0 auto; display: flex; align-items: center; justify-content: center;">多媒体课件</div>