第I卷 选择题

一、选择题：（本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题意要求的）

1．已知集合 $A=\{x\mid x(x-1)\le 0\}$，$B=\{x\mid e^x>1\}$，则 $(\complement_R A)\cap B=$ （　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(0,1)$　　D. $[0,1]$

2. 设复数 z 满足 $z(1-i)=4i$（i 是虚数单位），则 z 的共轭复数 $\overline{z}=$ （　　）

A. $-2-2i$　　B. $-2+2i$　　C. $2+2i$　　D. $2-2i$

3.设 $\theta\in\mathbf{R}$，则“$|\theta-\dfrac{\pi}{12}|<\dfrac{\pi}{12}$”是“$\sin\theta<\dfrac{1}{2}$”的 （　　）

A.充分而不必要条件　B.必要而不充分条件　C.充要条件　D.既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x)=x-\sin x$，则不等式 $f(x+1)+f(2-2x)>0$ 的解集是 （　　）

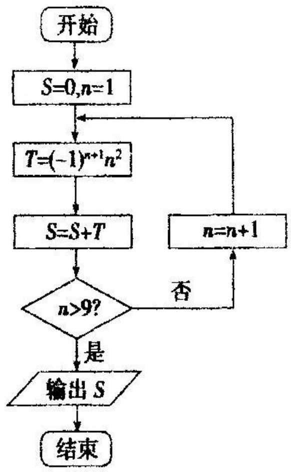
A. $(-\infty,-\dfrac{1}{3})$　　B. $(-\dfrac{1}{3},+\infty)$　　C. $(-\infty,3)$　　D. $(3,+\infty)$

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=a_2+10a_1$，$a_5=9$，则 $a_1=$ （　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{9}$　　D. $-\dfrac{1}{9}$

6. 将函数 $y=\sin(6x+\dfrac{\pi}{4})$ 的图象上各点的纵坐标不变，横坐标伸长到原来的3倍，再向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位，得到的函数的一个对称中心是 （　　）

A. $(\dfrac{\pi}{2},0)$　　B. $(\dfrac{\pi}{4},0)$　　C. $(\dfrac{\pi}{9},0)$　　D. $(\dfrac{\pi}{16},0)$



7.已知三棱锥 $P-ABC$ 的三条侧棱两两互相垂直，且 $AB=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{7}$，$AC=2$，则此三棱锥的外接球的体积为(　　)

A. $\dfrac{8}{3}\pi$　　B. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$　　C. $\dfrac{16}{3}\pi$　　D. $\dfrac{32}{3}\pi$

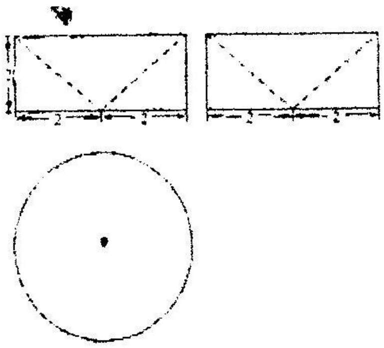
8. 如图所示（右）的程序框图中，输出 $S=$(　　)

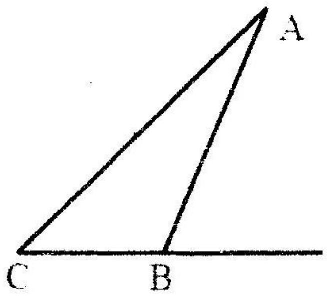
A. 45　　B. －55　　C. －66　　D. 66

9. 祖冲之之子祖暅是我国南北朝时代伟大的科学家，他在实践的基础上提出了体积计算的原理：“幂势既同，则积不容异”. 意思是，如果两个等高的几何体在同高处截得的截面面积恒等，那么这两个几何体的体积相等. 此即祖暅原理. 利用这个原理求球的体积时，需要

构造一个满足条件的几何体，已知该几何体三视图如图所示（下中），用一个与该几何体的下底面平行相距为$h\left(0<h<2\right)$的平面截该几何体，则截面面积为　　　（　　　）

A. $\pi\left(2-h\right)^2$　　　B. $\pi(4-h^2)$　　　C. 4π　　　D. πh^2





10. 为了竖一块广告牌，要制造三角形支架. 三角形支架如图所示（上右），要求$\angle ACB=60^\circ$，BC的长度大于1米，且AC比AB长0.5米. 为了使广告牌稳固，要求AC的长度越短越好，则AC最短为　　　（　　　）

A. $(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$米　　　B. 2米　　　C. $(1+\sqrt{3})$米　　　D. $(2+\sqrt{3})$米

11.已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1(\omega>1,|\varphi|\le\frac{\pi}{2})$，其图像与直线$y=-1$相邻两个交点的距离为$\pi$，若$f(x)>1$对于任意的$x\in(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3})$恒成立，则$\varphi$的取值范围是（　　　）

A. $[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}]$　　　B. $[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$　　　C. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$　　　D. $(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$

12. 若函数$f(x)=ae^x-x-2a$有两个零点，则实数a的取值范围是　　　（　　　）

A. $(-\infty,\frac{1}{e})$　　　B. $(0,\frac{1}{e})$　　　C. $(-\infty,0)$　　　D. $(0,+\infty)$

第II卷　非选择题

二、填空题：（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13.已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为120^0，$|\vec{a}|=3,|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，则$|\vec{b}|=$__________.

14. 若实数x,y满足$\begin{cases}x+y\le1\\x+1\ge0\\x-y\le1\end{cases}$，则$\frac{y}{x-2}$的取值范围是__________.

15. 已知θ是第四象限角，且$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，则$\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=$__________.

16. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=1+\lambda a_n$，其中$\lambda\ne0$，若$S_5=\frac{31}{32}$，则$\lambda=$________.

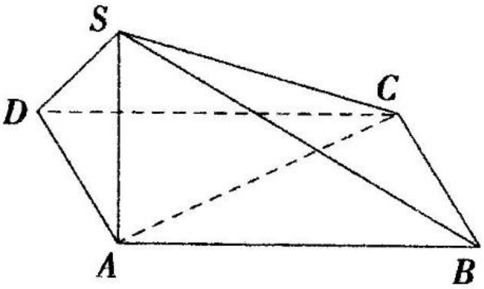
三、解答题：（本大题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d \neq 0$，它的前n项和为S_n，若$S_5=70$，且a_2，a_7，a_{22}成等比数列.（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（Ⅱ）设数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求证：$\frac{1}{6} \leq T_n < \frac{3}{8}$.

18.（本小题满分12分）三角形的内角A,B,C所对的边长分别为a,b,c，且满足$a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$.（Ⅰ）求角B的大小；（Ⅱ）若$2b\cos A=\sqrt{3}(c\cos A+a\cos C)$，$BC$边上的中线$AM$的长为$\sqrt{7}$，求$\Delta ABC$的面积.

19.（本小题满分12分）如图，在四棱锥$S-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，$\angle ADC=60^0$，$SA=1$，$AB=2$，$SB=\sqrt{5}$，平面$SAB \perp$底面$ABCD$，直线SC与底面$ABCD$所成的角为30^0.

（Ⅰ）证明：平面$SAD \perp$平面SAC；（Ⅱ）求二面角$B-SC-D$的余弦值.



20.（本小题满分12分）已知椭圆的中心是坐标原点O，焦点在x轴上，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，坐标原点O到过右焦点F且斜率为1的直线的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.（Ⅰ）求椭圆的标准方程；（Ⅱ）设过右焦点F且与坐标轴不垂直的直线l交椭圆于P,Q两点，在线段OF上是否存在点$M(m,0)$，使得$|MP|=|MQ|$？若存在，求出m的取值范围；若不存在，请说明理由.

21.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=e^{-x}-ax(x\in R)$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值;

（Ⅱ）若 $x\geq 0$ 时，$f(-x)+\ln(x+1)\geq 1$，求实数 a 的取值范围;

22.（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1: $\begin{cases} x=2+2\sqrt{2}\cos\theta \\ y=2+2\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），曲线 C_2: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），（$0<r<4$）. 以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，射线 $\theta=\alpha$ $(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$ 与曲线 C_1 交于 O,P 两点，与曲线 C_2 交于 O,N 两点，且 $|PN|$ 最大值为 $2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）将曲线 C_1 与曲线 C_2 化成极坐标方程，并求 r 的值;

（Ⅱ）射线 $\theta=\alpha+\dfrac{\pi}{4}$ 与曲线 C_1 交于 O,Q 两点，与曲线 C_2 交于 O,M 两点，求四边形 $MNPQ$ 面积的最大值.

数学（理科）试卷参考答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	A	C	C	A	B	B	B	D	C	D

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13．4　　14．$[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$　　15．$-\frac{4}{3}$　　16．-1

三、解答题

17.解　(1)由题意得$\begin{cases}5a_1+10d=70,\\(a_1+6d)^2=(a_1+d)(a_1+21d),\end{cases}$

解得 $a_1=6$，$d=4$，$\therefore a_n=6+(n-1)\times4=4n+2$.……………………4 分

(2)证明：$\because a_1=6$，$d=4$，$\therefore S_n=6n+\frac{n(n-1)}{2}\times4=2n^2+4n$，

即$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{2n\quad n+2}=\frac{1}{4}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，……………………7 分

$\therefore T_n=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{3}{8}-\frac{2n+3}{4(n+1)(n+2)}<\frac{3}{8}$,

$\because T_{n+1}-T_n=\frac{1}{4}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3})>0$，$\therefore$数列$\{T_n\}$是递增数列，

即$(T_n)_{\min}=T_1=\frac{3}{8}-\frac{2n+3}{4(n+1)(n+2)}=\frac{1}{6}$.故$\frac{1}{6}\le T_n<\frac{3}{8}$……………………12 分

18.解：(1)由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 B 是三角形的内角，所以 $B=\frac{\pi}{6}$.　……………………4 分

(2)由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，代入 $2b\cos A=\sqrt{3}(c\cos A+a\cos C)$

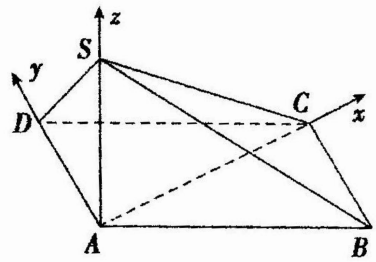
$\therefore 2\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin(A+C)$．$\therefore\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A\in(0，\pi)$，$A=\frac{\pi}{6}$……………………7 分

设 $CM=m$，则 $AC=2m$.

在$\triangle ACM$ 中，$7=4m^2+m^2+2m^2$，$\therefore m^2=1$，$m=1$，$m=-1$(舍去)，

$\therefore AC=BC=2$，　$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CA\cdot CB\cdot\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$……………………12 分

19．解：(1)证明：因为$SA=1$，$AB=2$，$SB=\sqrt{5}$，$SA^2+AB^2=SB^2$，
所以$\triangle SAB$为直角三角形，且$SA\perp AB$，
又平面$SAB\perp$底面$ABCD$，平面$SAB\cap$平面$ABCD=AB$，
所以$SA\perp$底面$ABCD$，$SA\perp AC$，
故$\angle SCA$为直线SC与底面$ABCD$所成的角，
即$\angle SCA=30°$，可得$AC=\sqrt{3}$，$SC=2$.
在$\triangle ADC$中，$AC=\sqrt{3}$，$CD=2$，$\angle ADC=60°$，



所以$\dfrac{AC}{\sin 60°}=\dfrac{CD}{\sin\angle DAC}$，即$\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sin\angle DAC}$，

得$\sin\angle DAC=1$，故$\angle DAC=90°$，所以$AD\perp AC$.因为$AD\cap SA=A$，所以$AC\perp$平面SAD.
又$AC\subset$平面SAC，所以平面$SAD\perp$平面SAC……………………………………………………5分

(2)以A为原点，AC，AD，AS所在的直线分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系(如图)，
故$A(0,0,0)$，$S(0,0,1)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,1,0)$，
则$\overrightarrow{SB}=(\sqrt{3},-1,-1)$，$\overrightarrow{SC}=(\sqrt{3},0,-1)$，$\overrightarrow{SD}=(0,1,-1)$，

设平面SBC的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{SB}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{SC}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}\sqrt{3}x_1-y_1-z_1=0\\ \sqrt{3}x_1-z_1=0\end{cases}$，令$z_1=\sqrt{3}$，得$x_1=1$，$y_1=0$，
故$\boldsymbol{n}_1=(1,0,\sqrt{3})$为平面$SBC$的一个法向量.
设平面SCD的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{SC}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{SD}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\sqrt{3}x_2-z_2=0\\ y_2-z_2=0\end{cases}$，故$y_2=z_2=\sqrt{3}x_2$.
令$x_2=1$，得$\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$为平面$SCD$的一个法向量.

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1+0+3}{2\times\sqrt{7}}=\dfrac{4}{2\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

分析可知二面角$B\text{-}SC\text{-}D$为钝角，故其余弦值为$-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$……………………………12分

20.解：(1)设椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F(c,0)(c>0)$，由坐标原点$O$到直线$x-y-c=0$的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，得$\dfrac{|0-0-c|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$c=1$.又$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故$a=\sqrt{2}$，$b=1$.

$\therefore$所求椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$……………………………………………………………4分

(2)假设存在点$M(m,0)(0<m<1)$满足条件，则以MP，MQ为邻边的平行四边形是菱形.

$\because$直线l与x轴不垂直，$\therefore$设直线l的方程为$y=k(x-1)(k\neq0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}x^2+2y^2=2\\ y=k\quad x-1\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，$\Delta>0$恒成立，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$. 设线段 PQ 的中点为 $N(x_0, y_0)$，

则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2}{1+2k^2}$，$y_0=k(x_0-1)=\dfrac{-k}{1+2k^2}$. $\because |MP|=|MQ|$，$\therefore MN\perp PQ$，

$\therefore k_{MN}\cdot k_{PQ}=-1$， 即 $\dfrac{\dfrac{-k}{1+2k^2}}{\dfrac{2k^2}{1+2k^2}-m}\cdot k=-1$， $\therefore m=\dfrac{k^2}{1+2k^2}=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{k^2}}$.

$\because k^2>0$，$\therefore 0<m<\dfrac{1}{2}$……………………………………12 分

21.解：(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^{-x}+x$，则 $f'(x)=-\dfrac{1}{e^x}+1$.令 $f'(x)=0$，得 $x=0$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore$函数 $f(x)$在区间$(-\infty, 0)$上单调递减，在区间$(0, +\infty)$上单调递增.

$\therefore$当 $x=0$ 时，函数 $f(x)$取得最小值，其值为 $f(0)=1$……………………………4 分

(2)若 $x\geq 0$ 时，$f(-x)+\ln(x+1)\geq 1$，即 $e^x+ax+\ln(x+1)-1\geq 0$.(*)

令 $g(x)=e^x+ax+\ln(x+1)-1$，则 $g'(x)=e^x+\dfrac{1}{x+1}+a$.

①若 $a\geq -2$，由(1)知 $e^{-x}+x\geq 1$，即 $e^{-x}\geq 1-x$，故 $e^x\geq 1+x$.

$\therefore g'(x)=e^x+\dfrac{1}{x+1}+a\geq (x+1)+\dfrac{1}{x+1}+a\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}}+a=2+a\geq 0$，

$\therefore$函数 $g(x)$在区间$[0, +\infty)$上单调递增，$\therefore g(x)\geq g(0)=0$.$\therefore$(*)式成立.

②若 $a<-2$，令$\varphi(x)=e^x+\dfrac{1}{x+1}+a$，则$\varphi'(x)=e^x-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2e^x-1}{(x+1)^2}\geq 0$.

$\therefore$函数$\varphi(x)$在区间$[0, +\infty)$上单调递增．由于$\varphi(0)=2+a<0$，

$\varphi(-a)=e^{-a}+\dfrac{1}{1-a}+a\geq 1-a+\dfrac{1}{1-a}+a=1+\dfrac{1}{1-a}>0$.

故$\exists x_0\in(0, -a)$，使得$\varphi(x_0)=0$.

则当 $0<x<x_0$ 时，$\varphi(x)<\varphi(x_0)=0$，即 $g'(x)<0$，$\therefore$函数 $g(x)$在区间$(0, x_0)$上单调递减.

$\therefore g(x_0)<g(0)=0$，即(*)式不恒成立.

综上所述，实数 a 的取值范围是$[-2, +\infty)$. ……………………………………………12 分

22.（Ⅰ）$C_1:\rho=4\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$， $C_2:\rho=r$

$|PN|=|\rho_P-\rho_N|=|4\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})-r|_{\max}=2\sqrt{2}$，$\therefore r=2\sqrt{2}$ ， $\therefore C_2:\rho=2\sqrt{2}$ ……4 分

（Ⅱ）$S_{\text{四边形}}=S_{\Delta OPQ}-S_{\Delta OMN}=\dfrac{1}{2}OP\cdot OQ\sin\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}OM\cdot ON\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})\times 4\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=4\sqrt{2}\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})+4-2\sqrt{2}$

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{8}$ 时，面积的最大值为 $4+2\sqrt{2}$ ……10 分