

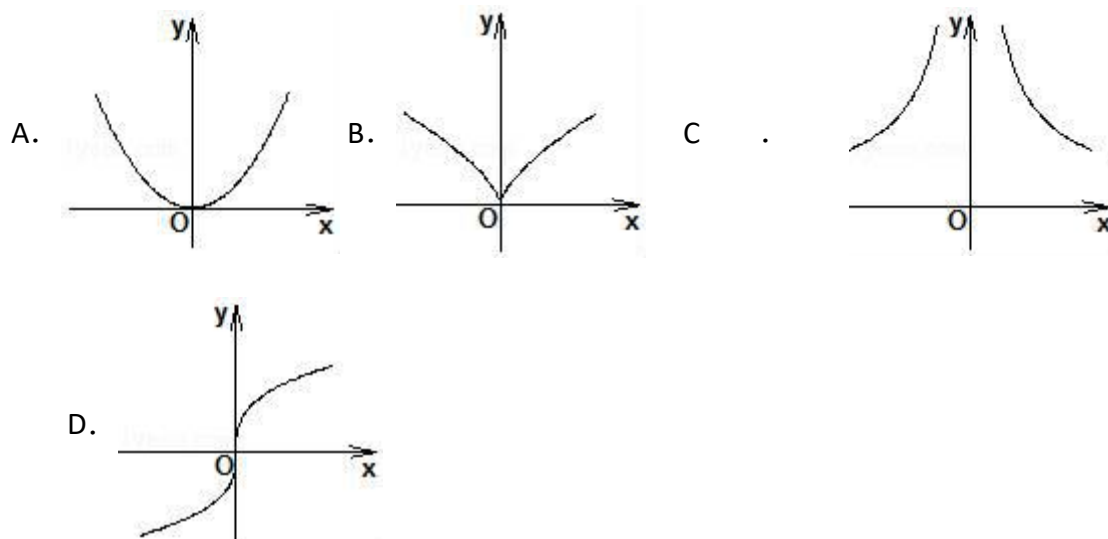
2016-2017 学年高一（上）期末数学试卷

一、填空题（本大题满分 36 分）本大题共有 12 题，只要求直接填写结果，每个空格填对得 3 分，否则一律得零分.

1. 函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图象均过定点_____.
2. 请写出“好货不便宜”的等价命题: _____.
3. 若集合 $A=\{x|x\leq 1\}$, $B=\{x|x\geq a\}$ 满足 $A\cap B=\{1\}$, 则实数 a =_____.
4. 不等式 $2|x-1|-1<0$ 的解集是_____.
5. 若 $f(x+1)=2x-1$, 则 $f(1)$ =_____.
6. 不等式 $\frac{x-3}{x-2}\geq 0$ 的解集为_____.
7. 设函数 $f(x)=(x+1)(x+a)$ 为偶函数, 则 a =_____.
8. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$, 则 $f(x)\cdot g(x)$ =_____.
9. 设 $\alpha: x\leq -5$ 或 $x\geq 1$, $\beta: 2m-3\leq x\leq 2m+1$, 若 α 是 β 的必要条件, 求实数 m 的取值范围_____.
10. 函数 $y=(\frac{1}{2})^{x^2-2}$ 的值域是_____.
11. 已知 $ab>0$, 且 $a+4b=1$, 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为_____.
12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} (1-2a)^x & (x<1) \\ \frac{a}{x}+4 & (x\geq 1) \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 则 a 的取值范围是_____.

二、选择题（本大题满分 12 分）本大题共有 4 题，每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，每题答对得 3 分，否则一律得零分.

13. 函数 $y=x^{\frac{4}{3}}$ 的大致图象是 ()



14. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x - 1$ ，则 $x < 0$ 时 $f(x) = (\quad)$

- A. $-x - 1$ B. $x + 1$ C. $-x + 1$ D. $x - 1$

15. 证券公司提示：股市有风险，入市需谨慎. 小强买的股票 A 连续 4 个跌停（一个跌停：比前一天收市价下跌 10%），则至少需要几个涨停，才能不亏损（一个涨停：比前一天收市价上涨 10%）. $(\quad)$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

16. 给定实数 x ，定义 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数，则下列结论中不正确的是 $(\quad)$

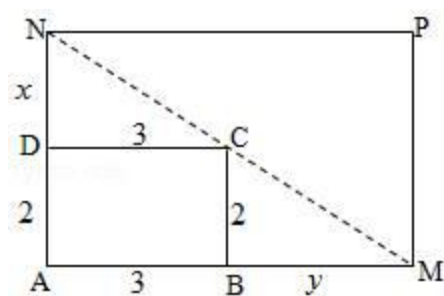
- A. $x - [x] \geq 0$
 B. $x - [x] < 1$
 C. 令 $f(x) = x - [x]$ ，对任意实数 x ， $f(x+1) = f(x)$ 恒成立
 D. 令 $f(x) = x - [x]$ ，对任意实数 x ， $f(-x) = f(x)$ 恒成立

三、解答题（本大题满分 52 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

17. 已知 $(m^2 + m)^{\frac{3}{5}} \leq (3 - m)^{\frac{3}{5}}$ ，求实数 m 的取值范围.

18. 如图，矩形草坪 AMPN 中，点 C 在对角线 MN 上. CD 垂直于 AN 于点 D，CB 垂直于 AM 于点 B， $|CD| = |AB| = 3$ 米， $|AD| = |BC| = 2$ 米，设 $|DN| = x$ 米， $|BM| = y$

米. 求这块矩形草坪 AMPN 面积的最小值.



19. 设 a 是实数, 函数 $f(x) = a - \frac{2}{2^x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$),

(1) 若已知 $(1, 2)$ 为该函数图象上一点, 求 a 的值.

(2) 证明: 对于任意 a , $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数.

20. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$.

(1) 若对任意的实数 x 都有 $f(1+x) = f(1-x)$ 成立, 求实数 a 的值;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为单调递增函数, 求实数 a 的取值范围;

(3) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值.

21. 在区间 D 上, 如果函数 $f(x)$ 为减函数, 而 $xf(x)$ 为增函数, 则称 $f(x)$

为 D 上的弱减函数. 若 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

(1) 判断 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是否为弱减函数;

(2) 当 $x \in [1, 3]$ 时, 不等式 $\frac{a}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{a+4}{2x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若函数 $g(x) = f(x) + k|x| - 1$ 在 $[0, 3]$ 上有两个不同的零点, 求实数 k 的取值范围.

2016-2017 学年上海市浦东新区高一（上）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题满分 36 分）本大题共有 12 题，只要求直接填写结果，每个空格填对得 3 分，否则一律得零分.

1. 函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图象均过定点 $(0, 1)$.

【考点】指数函数的图象与性质.

【分析】根据指数函数的性质判断即可.

【解答】解： $\because a^0=1$, $a>0$ 且 $a\neq 1$,

$\therefore$ 函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图象均过定点 $(0, 1)$,

故答案为： $(0, 1)$.

2. 请写出“好货不便宜”的等价命题：便宜没好货.

【考点】四种命题.

【分析】写出原命题的逆否命题，可得答案.

【解答】解：“好货不便宜”即“如果货物为好货，则价格不便宜”，

其逆否命题为：“如果价格便宜，则货物不是好货”，

即“便宜没好货”，

故答案为：便宜没好货

3. 若集合 $A=\{x|x\leq 1\}$, $B=\{x|x\geq a\}$ 满足 $A\cap B=\{1\}$, 则实数 $a=\underline{1}$.

【考点】交集及其运算.

【分析】由 A , B , 以及两集合的交集，确定出 a 的值即可.

【解答】解： $\because A=\{x|x\leq 1\}$, $B=\{x|x\geq a\}$, 且 $A\cap B=\{1\}$,

$\therefore a=1$,

故答案为：1

4. 不等式 $2|x-1|-1<0$ 的解集是 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

【考点】绝对值不等式的解法.

【分析】先去掉绝对值然后再根据绝对值不等式的解法进行求解.

【解答】解：①若 $x \geq 1$, $\therefore 2(x-1)-1<0$, $\therefore x<\frac{3}{2}$;

②若 $x<1$, $\therefore 2(1-x)-1<0$, $\therefore x>\frac{1}{2}$;

综上 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$.

5. 若 $f(x+1)=2x-1$, 则 $f(1)=$ -1 .

【考点】函数的值.

【分析】 $f(1)=f(0+1)$, 由此利用 $f(x+1)=2x-1$, 能求出结果.

【解答】解: $\because f(x+1)=2x-1$,

$\therefore f(1)=f(0+1)=2 \times 0-1=-1$.

故答案为: -1 .

6. 不等式 $\frac{x-3}{x-2} \geq 0$ 的解集为 $(-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$.

【考点】其他不等式的解法.

【分析】首先将不等式化为整式不等式, 然后求解集.

【解答】解: 原不等式等价于 $(x-3)(x-2) \geq 0$ 且 $x-2 \neq 0$,

所以不等式的解集为 $(-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$;

故答案为: $(-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$

7. 设函数 $f(x)=(x+1)(x+a)$ 为偶函数, 则 $a=$ -1 .

【考点】函数奇偶性的性质.

【分析】因为函数为偶函数, 则根据偶函数定义 $f(-x)=f(x)$ 得到等式解出 a 即可.

【解答】解: $\because$ 函数为偶函数得 $f(1)=f(-1)$

得： $2(1+a)=0$

$\therefore a=-1$.

故答案为： -1 .

8. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$, 则 $f(x) \cdot g(x)=\underline{x, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)}$.

【考点】函数解析式的求解及常用方法.

【分析】直接将 $f(x)$, $g(x)$ 代入约分即可.

【解答】解： $\because$ 函数 $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$,

$\therefore f(x) \cdot g(x)=x, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$,

故答案为： $x, x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

9. 设 $\alpha: x \leq -5$ 或 $x \geq 1$, $\beta: 2m-3 \leq x \leq 2m+1$, 若 α 是 β 的必要条件, 求实数 m 的取值范围 $m \leq -3$ 或 $m \geq 2$.

【考点】必要条件、充分条件与充要条件的判断.

【分析】根据充分必要条件的定义以及集合的包含关系求出 m 的范围即可.

【解答】解： $\alpha: x \leq -5$ 或 $x \geq 1$, $\beta: 2m-3 \leq x \leq 2m+1$,

若 α 是 β 的必要条件,

则 $2m-3 \geq 1$ 或 $2m+1 \leq -5$,

故 $m \geq 2$ 或 $m \leq -3$,

故答案为： $m \geq 2$ 或 $m \leq -3$.

10. 函数 $y=(\frac{1}{2})^{x^2-2}$ 的值域是 $(0, 4]$.

【考点】函数的值域.

【分析】换元得出设 $t=x^2-2 \geq -2$, $y=(\frac{1}{2})^t$, 求解即可得出答案.

【解答】解：设 $t=x^2-2 \geq -2$,

$\because y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 为减函数,

$$\therefore 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4,$$

故函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 2}$ 的值域是 $(0, 4]$,

故答案为: $(0, 4]$.

11. 已知 $ab > 0$, 且 $a + 4b = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 9.

【考点】基本不等式.

【分析】把“1”换成 $4a + b$, 整理后积为定值, 然后用基本不等式求最小值

【解答】解: $\because ab > 0$, 且 $a + 4b = 1$,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + 4b) = 1 + 4 + \frac{4b}{a} + \frac{a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9, \text{ 当且仅当 } a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6} \text{ 时}$$

取等号,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ 的最小值为 } 9,$$

故答案为: 9.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1 - 2a)^x & (x < 1) \\ \frac{a}{x} + 4 & (x \geq 1) \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 则 a 的取值范围是

$(-\infty, 0)$.

【考点】函数单调性的性质.

【分析】由条件利用函数的单调性的性质, 可得 $1 - 2a > 1$, 且 $a < 0$, 由此求得 a 的取值范围.

【解答】解: 由于函数 $f(x) = \begin{cases} (1 - 2a)^x & (x < 1) \\ \frac{a}{x} + 4 & (x \geq 1) \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数, $\therefore 1 - 2a$

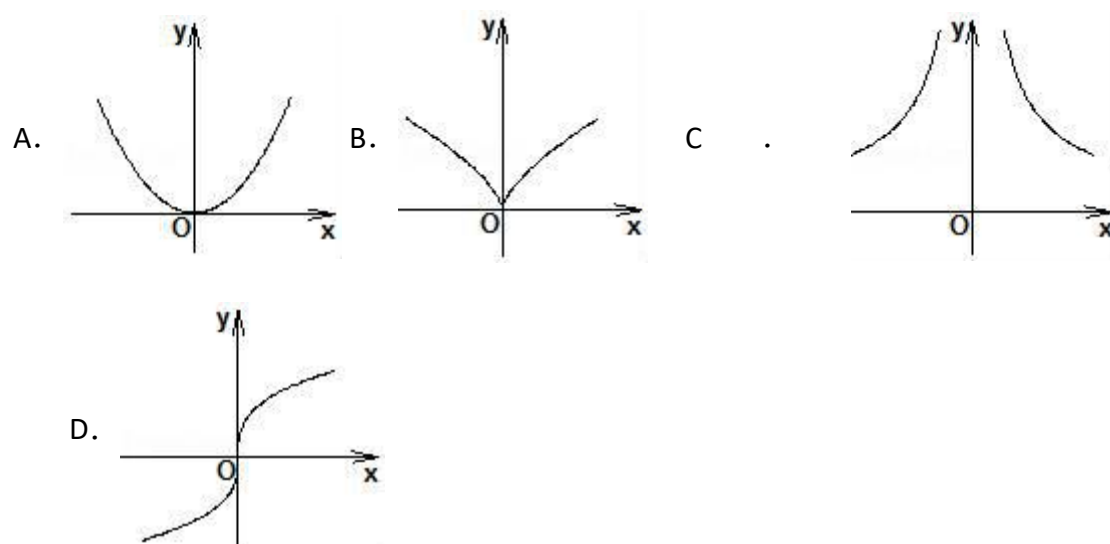
> 1 , 且 $a < 0$,

求得 $a < 0$,

故答案为: $(-\infty, 0)$.

二、选择题（本大题满分 12 分）本大题共有 4 题，每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，每题答对得 3 分，否则一律得零分.

13. 函数 $y=x^{\frac{4}{3}}$ 的大致图象是 ()



【考点】函数的图象.

【分析】根据函数的奇偶性和函数值得变化趋势即可判断.

【解答】解: $y=f(-x) = (-x)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} = f(x)$,

$\therefore$ 函数 $y=x^{\frac{4}{3}}$ 为偶函数,

$\therefore$ 图象关于 y 轴对称, 故排除 C, D,

$\because \frac{4}{3} > 1$,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $y=x^{\frac{4}{3}}$ 的变化是越来越快, 故排除 B

故选: A

14. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - 1$, 则 $x < 0$ 时 $f(x) =$ ()

A. $-x - 1$ B. $x + 1$ C. $-x + 1$ D. $x - 1$

【考点】函数奇偶性的性质.

【分析】根据 $x > 0$ 时函数的表达式，可得 $x < 0$ 时 $f(-x) = -x - 1$ ，再利用奇函数的定义，即可算出当 $x < 0$ 时函数 $f(x)$ 的表达式.

【解答】解：设 $x < 0$ ，则 $-x > 0$ ，

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时， $f(x) = x - 1$ ，

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时， $f(-x) = -x - 1$ ，

又 $\because f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，

$\therefore f(x) = -f(-x)$ ，

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时， $f(x) = -f(-x) = x + 1$ ，

故选 B.

15. 证券公司提示：股市有风险，入市需谨慎. 小强买的股票 A 连续 4 个跌停（一个跌停：比前一天收市价下跌 10%），则至少需要几个涨停，才能不亏损（一个涨停：比前一天收市价上涨 10%）. （ ）

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【考点】函数的值.

【分析】设小强买的股票 A 时买入价格为 a ，连续 4 个跌停后价格为 $a(1 - 10\%)^4 = 0.6561a$ ，设至少需要 x 个涨停，才能不亏损，则 $0.6561a(1 + 10\%)^x \geq a$ ，由此能求出结果.

【解答】解：设小强买的股票 A 时买入价格为 a ，

连续 4 个跌停后价格为 $a(1 - 10\%)^4 = 0.6561a$ ，

设至少需要 x 个涨停，才能不亏损，则 $0.6561a(1 + 10\%)^x \geq a$ ，

整理得： $1.1^x \geq 1.5235$ ，

$\because 1.1^5 = 1.6105$ ， $1.1^4 = 1.4641$.

$\therefore$ 至少需要 5 个涨停，才能不亏损.

故选：C.

16. 给定实数 x ，定义 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数，则下列结论中不正确的是（ ）

A. $x - [x] \geq 0$

B. $x - [x] < 1$

C. 令 $f(x) = x - [x]$, 对任意实数 x , $f(x+1) = f(x)$ 恒成立

D. 令 $f(x) = x - [x]$, 对任意实数 x , $f(-x) = f(x)$ 恒成立

【考点】函数的值；函数解析式的求解及常用方法.

【分析】利用 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, 结合函数性质求解.

【解答】解: 在 A 中, $\because [x]$ 为不大于 x 的最大整数, $\therefore x - [x] \geq 0$, 故 A 正确;

在 B 中, $\because [x]$ 为不大于 x 的最大整数, $\therefore x - [x] < 1$, 故 B 正确;

在 C 中, $\because [x]$ 为不大于 x 的最大整数, $f(x) = x - [x]$,

$\therefore$ 对任意实数 x , $f(x+1) = f(x)$ 恒成立, 故 C 正确;

在 D 中, $\because [x]$ 为不大于 x 的最大整数, $f(x) = x - [x]$,

$\therefore f(-3.2) = -3.2 - [-3.2] = -3.2 + 4 = 0.8$, $f(3.2) = 3.2 - [3.2] = 3.2 - 3 = 0.2$,

$\therefore$ 对任意实数 x , $f(x+1) = f(x)$ 不成立, 故 D 错误.

故选: D.

三、解答题 (本大题满分 52 分) 本大题共有 5 题, 解答下列各题必须写出必要的步骤.

17. 已知 $(m^2+m)^{\frac{3}{5}} \leq (3-m)^{\frac{3}{5}}$, 求实数 m 的取值范围.

【考点】幂函数的性质.

【分析】根据函数的单调性得到关于 m 的不等式, 解出即可.

【解答】解: (1) 设函数 $y = x^{\frac{3}{5}}$,

函数为 $\mathbb{R}$ 上的单调递增函数 ...

得, $m^2+m \leq -m+3$...

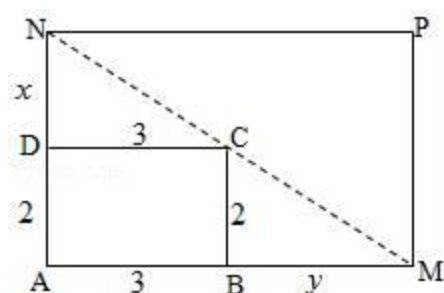
即, $m^2+2m-3 \leq 0$...

得, $(m-1)(m+3) \leq 0$

所以, m 的取值范围为: $m \in [-3, 1]$...

18. 如图, 矩形草坪 AMPN 中, 点 C 在对角线 MN 上. CD 垂直于 AN 于点 D, CB 垂直于 AM 于点 B, $|CD| = |AB| = 3$ 米, $|AD| = |BC| = 2$ 米, 设 $|DN| = x$ 米, $|BM| = y$

米．求这块矩形草坪 AMPN 面积的最小值．



【考点】基本不等式在最值问题中的应用．

【分析】由题意 $\angle NCD = \angle CMB \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2}{y} \Rightarrow xy = 6$ ，表示出矩形的面积，利用基本不等式，即可求得结论．

【解答】解：由题意 $\angle NCD = \angle CMB \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2}{y} \Rightarrow xy = 6 \dots$

$$S_{AMPN} = (x+2)(y+3) = xy + 3x + 2y + 6 = 12 + 3x + 2y \dots$$

$$\geq 12 + 2\sqrt{3x \cdot 2y} = 24 \dots$$

当且仅当 $3x = 2y$ ，即 $x = 2$ ， $y = 3$ 时取得等号．...

面积的最小值为 24 平方米．

19. 设 a 是实数，函数 $f(x) = a - \frac{2}{2^x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$)，

(1) 若已知 $(1, 2)$ 为该函数图象上一点，求 a 的值．

(2) 证明：对于任意 a ， $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数．

【考点】函数的图象．

【分析】(1) 代值计算即可求出 a

(2) 运用函数的定义判断证明函数的单调性，先在取两个值 x_1, x_2 后进行作差变形，确定符号，最后下结论即可．

【解答】解：(1) $2 = a - \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{8}{3}$ ．

(2) 证明：设任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ， $x_1 < x_2$ ，

$$\begin{aligned} & \text{则} \quad f(x_1) - f(x_2) \\ &= \left(a - \frac{2}{2^{x_1} + 1}\right) - \left(a - \frac{2}{2^{x_2} + 1}\right) = \frac{2}{2^{x_2} + 1} - \frac{2}{2^{x_1} + 1} = \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)}, \end{aligned}$$

由于指数函数 $y=2^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是增函数, 且 $x_1 < x_2$, 所以 $2^{x_1} < 2^{x_2}$ 即 $2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$,

又由 $2^x > 0$, 得 $2^{x_1+1} > 0$, $2^{x_2+1} > 0$,

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$ 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以, 对于任意 a , $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数.

20. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$.

(1) 若对任意的实数 x 都有 $f(1+x) = f(1-x)$ 成立, 求实数 a 的值;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为单调递增函数, 求实数 a 的取值范围;

(3) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值.

【考点】函数的最值及其几何意义; 二次函数的性质.

【分析】(1) 由题意可得 $x=1$ 为对称轴, 求得 $f(x)$ 的对称轴方程, 即可得到 a ;

(2) 求得 $f(x)$ 的递增区间, $[1, +\infty)$ 为它的子区间, 可得 a 的范围;

(3) 由函数图象开口向上, 对称轴 $x=a$, 可得最大值只能在端点处取得, 讨论 $a=0$, $a>0$, $a<0$, 即可得到所求最大值.

【解答】解: (1) 由对任意的实数 x 都有 $f(1+x) = f(1-x)$ 成立, 知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$ 的对称轴为 $x=a$, 即 $a=1$;

(2) 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$ 的图象的对称轴为直线 $x=a$, 由 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上为单调递增函数,

$y=f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为单调递增函数, 得, $a \leq 1$;

(3) 函数图象开口向上, 对称轴 $x=a$, 可得最大值只能在端点处取得.

当 $a < 0$ 时, $x=1$ 时, 函数取得最大值为: $2 - 2a$;

当 $a > 0$ 时, $x=-1$ 时, 函数取得最大值为: $2+2a$;

当 $a=0$ 时, $x=1$ 或 -1 时, 函数取得最大值为: 2 .

21. 在区间 D 上, 如果函数 $f(x)$ 为减函数, 而 $xf(x)$ 为增函数, 则称 $f(x)$

为 D 上的弱减函数. 若 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

(1) 判断 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是否为弱减函数;

(2) 当 $x \in [1, 3]$ 时, 不等式 $\frac{a}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{a+4}{2x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若函数 $g(x) = f(x) + k|x| - 1$ 在 $[0, 3]$ 上有两个不同的零点, 求实数 k 的取值范围.

【考点】 函数单调性的性质.

【分析】 (1) 利用初等函数的性质、弱减函数的定义, 判断 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 是 $[0, +\infty)$ 上的弱减函数.

(2) 根据题意可得 $\begin{cases} a \leq (\frac{x}{\sqrt{1+x}})_{\min} \\ \frac{a+4}{2} \geq (\frac{x}{\sqrt{1+x}})_{\max} \end{cases}$, 再利用函数的单调性求得函数的最值,

可得 a 的范围.

(3) 根据题意, 当 $x \in (0, 3]$ 时, 方程 $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = k|x|$ 只有一解, 分离参数 k , 换元利用二次函数的性质, 求得 k 的范围.

【解答】 解: (1) 由初等函数性质知, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 而 $xf(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{(x+1)-1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 是 $[0, +\infty)$ 上的弱减函数.

(2) 不等式化为 $a \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}} \leq \frac{a+4}{2}$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立, 则 $\begin{cases} a \leq (\frac{x}{\sqrt{1+x}})_{\min} \\ \frac{a+4}{2} \geq (\frac{x}{\sqrt{1+x}})_{\max} \end{cases}$,

而 $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 在 $[1, 3]$ 单调递增, $\therefore \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$, $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$,

$\therefore \begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \\ \frac{a+4}{2} \geq \frac{3}{2} \end{cases}$, $\therefore a \in [-1, \frac{1}{2}]$.

(3) 由题意知方程 $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = k|x|$ 在 $[0, 3]$ 上有两个不同根,

①当 $x=0$ 时, 上式恒成立;

②当 $x \in (0, 3]$ 时, 则由题意可得方程 $1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} = k|x|$ 只有一解,

根据 $k = \frac{1}{x} (1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x} \cdot (\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{1+x})^2 + \sqrt{1+x}}$,

令 $t = \sqrt{1+x}$, 则 $t \in (1, 2]$,

方程化为 $k = \frac{1}{t^2 + t}$ 在 $t \in (1, 2]$ 上只有一解, 所以 $k \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.