三角函数求值域的类型总结

摘要：三角函数的值域是三角函数的一个重要性质，求三角函数的值域在三角函数模块乃至在整个函数模块一直占有一席之地，也是高考的重点、热点，几乎每年的高考都有求三角函数值域的题目。求三角函数的值域，也经常与其他知识结合考察，比如一次函数、二次函数、分式函数和不等式等重要知识点，具有较强的综合性，也有助于培养学生的逻辑思维能力。
关键词：三角函数的性质、值域

正弦函数、余弦函数的值域为$\sin x\in\left[-1,1\right],\cos x\in\left[-1,1\right]$，正弦型、余弦型函数的值域为$A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\in\left[-A,A\right],A\cos\left(\omega x+\varphi\right)\in\left[-A,A\right]$，而求解关于三角函数的值域问题在定义域内或利用三角函数的单调性、或运用倍角、半角公式及辅助角公式化简为正弦型或余弦型函数、或结合其它函数、、或换元、或数形结合等求得，求解过程中蕴含整体代换、数形结合等重要数学思想。现在总结归纳常见的几种求三角函数的值域类型，以供参考：

类型一、只含$\sin x$或$\cos x$的一次结构，常见的结构形如：

$y=a\sin x+b,y=a\cos x+b,y=\dfrac{a\sin x+b}{c\sin x+d},y=\dfrac{a\cos x+b}{c\cos x+d}$，这些结构的值域问题主要运用$\sin x/\cos x$的有界性，即$\left|\sin x\right|\le 1,\left|\cos x\right|\le 1$，运用整体代换，将$\dfrac{\sin x}{\cos x}$看做一个整体，把问题转化为求一次函数、分式函数的值域问题。运用求一次函数、分式函数值域的方法即可解得。

例 1、 求函数$f\left(x\right)=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}$的值域

解析：

法一、令$t=\sin x\therefore t\in\left[-1,1\right]$，所以原式转化为求$y=\dfrac{2t-1}{t+2},t\in\left[-1,1\right]$的值域

$\because\ y=\dfrac{2t-1}{t+2}=\dfrac{2\left(t+2\right)-5}{t+2}=2-\dfrac{5}{t+2}$ 又因为$t\in\left[-1,1\right]$，$\therefore y\in[-3,\dfrac{1}{3}]$

$\therefore$值域为$[-3,\dfrac{1}{3}]$

法二、 令$y=f\left(x\right)=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}$，$\therefore\sin x=\dfrac{1+2y}{2-y}\because\left|\sin x\right|\le 1$

$\therefore\left|\dfrac{1+2y}{2-y}\right|\le 1\therefore -3\le y\le\dfrac{1}{3}\therefore$值域为$[-3,\dfrac{1}{3}]$

法一运用了分离变量的方法，法二运用了反函数的思想

类型二、形如$y=a\sin x+b\cos x$的函数，运用辅助角公式转化成正弦型或余弦型函数，利用三角函数的性质求函数的值域

例 2、 求函数$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x,x\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}]$的值域

解析：$\because y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$

$\because x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\therefore x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{7}{12}\pi,\frac{5}{6}\pi]\therefore\sin(x+\frac{\pi}{3})\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}]$

$\therefore$ 值域为$[1,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}]$

类型三、只含$\sin x$或$\cos x$的二次结构，形如

$y=a\sin^2 x+b\sin x+c, y=a\sin^2 x+b\cos x+c\ (a\neq 0)$，对于这种结构，求值域主要运用三角函数的有界性（$|\sin x|\leq 1,|\cos x|\leq 1$）及二次函数求值域的方法。运用整体代换、将关于三角函数的二次结构形式转化为简单的二次函数形式。

例 3、 求函数$f(x)=\cos^2 x+2\sin x+1$的值域

解析：$\because \sin^2 x+\cos^2 x=1\therefore\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$\therefore f(x)=-\sin^2 x+2\sin x+2$

令$t=\sin x\therefore t\in[-1,1]$

$\therefore$ 原函数转化为求$g(t)=-t^2+2t+2,t\in[-1,1]$的值域 $\because$ 对称轴为$t=1$

$\because$ $g(t)$在$[-1,1]$上为单调递增函数$\therefore g(t)_{\max}=g(1)=3,g(t)_{\min}=g(-1)=-1$

$\therefore g(t)\in[-1,3]\therefore$ 函数$f(x)$的值域为$[-1,3]$

类型四、形如$y=a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c, y=a\cos^2 x+b\sin x\cos x+c$结构的函数，运用倍角、半角公式降幂或升幂，结合辅助角公式化成正弦型、余弦型函数 $A\sin(\omega x+\varphi)$、$A\cos(\omega x+\varphi)$，由三角函数的性质求得值域。

例 4、 求函数$y=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x,x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$的值域

解析：$\because y=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+1=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$

$x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}],\therefore 2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{2}{3}\pi,\frac{7}{6}\pi]$

$\therefore y\in[0,\sqrt{3}+1]$所以函数的值域为$[0,\sqrt{3}+1]$

类型五、含$\sin x\pm\cos x,\sin x\cos x$结构的函数

求这种结构的函数的值域，运用换元的方法，通过换元，将$\sin x+\cos x,\sin x\cos x$

都用同一个参数表示，令$t=\sin x\pm\cos x,\therefore t=\sqrt{2}\sin(x\pm\frac{\pi}{4})$，所以

$t^2=\left(\sin x\pm\cos x\right)^2=\sin^2 x+\cos^2 x\pm 2\sin x\cos x=1\pm 2\sin x\cos x$

所以$\sin x\cos x=\frac{\pm(t^2-1)}{2}$，把问题转化为求只含参数$t$的二次函数的值域，此时需注意参数$t$的取值范围。

例 5、　求函数$y=\sin x\cos x+\sin x+\cos x,x\in[0,\frac{\pi}{3}]$的值域

解析：令$t=\sin x+\cos x\therefore\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

$\therefore t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\because x\in[0,\frac{\pi}{3}]\therefore x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}]\quad\therefore t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$

所以转化为求$g\left(t\right)=\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2}$，$t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$的值域

$\because$对称轴为$t=-1\therefore g\left(t\right)$在区间$\left[1,\sqrt{2}\right]$上为单调递增函数

$\therefore g\left(t\right)_{\max}=g\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{2},g\left(t\right)_{\min}=g\left(1\right)=1$

原函数的值域为$[1,\frac{1}{2}+\sqrt{2}]$

类型六、分式的分子、分母含$\sin x,\cos x$的函数：形如$y=\frac{a\sin x+b}{c\cos x+d},y=\frac{a\cos x+b}{c\sin x+d}$

求这种结构的函数的值域，常用两种方法解决：第一种即是等式两边同乘分母，利用辅助角公式得出形如$A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$、$A\cos\left(\omega x+\varphi\right)$，运用三角函数性质求值域；第二种是利用数形结合，因为点$\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$转化成求圆上的点到一定点的斜率范围。

例 6、　求函数$y=\frac{\sin x-1}{\cos x-2}$值域

解析：

法一、　$\because y=\frac{\sin x-1}{\cos x-2}\therefore y\left(\cos x-2\right)=\sin x-1$

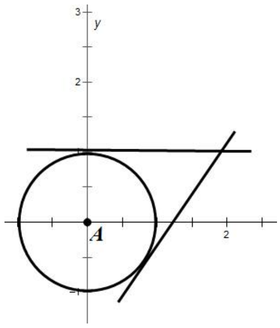
$\therefore\sin x-y\cos x=1-2y\therefore\sqrt{1+y^2}\sin\left(x-\varphi\right)=1-2y$

其中$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

$\therefore \sin\left(x-\varphi\right)=\dfrac{1-2y}{\sqrt{1+y^2}} \therefore \left|\dfrac{1-2y}{\sqrt{1+y^2}}\right| \le 1$

解得$0 \le y \le \dfrac{4}{3}$，所以函数的值域为$[0,\dfrac{4}{3}]$

法二、函数$y=\dfrac{\sin x-1}{\cos x-2}$的几何意义为点$\left(\cos x,\sin x\right)$与点$\left(2,1\right)$连接所在直线$l$的斜率



设$l: y-1=k\left(x-2\right)$，由原点 A 到直线l的距离为 1 得：$\dfrac{\left|1-2k\right|}{\sqrt{1+k^2}}=1 \therefore k=0或\dfrac{4}{3}$

所以直线l的斜率变化范围为$[0,\dfrac{4}{3}]$，所以函数的值域为$[0,\dfrac{4}{3}]$

另外：求这种结构的函数的值域还可以利用弦化切，转化成只含一种三角函数的分式结构。

应用练习：

1、 求$y=\dfrac{\cos x-1}{\cos x+2}$值域

2、 已知$\sin x+\sin y=\dfrac{1}{3}$，求$\sin y-\cos^2 x$的范围

3、 求函数$f\left(x\right)=\cos^2 \omega x+2\sqrt{3}\sin x\cos x,$，最小正周期为$\pi$，求在$x\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}]$上的最值

4、对任意角$\theta \in R$，$\sin^2\theta+2m\cos\theta+4m-1<0$恒成立，求 m 取值范围

5、求$y=\dfrac{3\sin x-6}{2-\cos x}$值域