密封线内不要答题

数　学(文科)

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分. 其中第 22 题～第 23 题为选考题,其他题为必考题. 满分 150 分,考试时间 120 分钟.
2. 答题前,考生务必将密封线内的项目填写清楚.
3. 请将选择题答案填在非选择题前面的答题表中;非选择题用黑色墨水签字笔答题.

题号	一	二	三						总分	合分人	复分人
			17	18	19	20	21	22/23			
得分											

得分	评卷人

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-2<0\}$,$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{x|-\sqrt{2}<x\leqslant 3\}$　　B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x|0<x\leqslant 3\}$　　D. $\{x|-2<x\leqslant 3\}$

2. 已知 i 为虚数单位,复数 $z=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$,则 $z\cdot\bar{z}=$

A. $\dfrac{11}{5}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{12}{5}$　　D. $\dfrac{13}{5}$

3. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上任意一点到两条渐近线距离的积为 $\dfrac{a^2}{3}$,则双曲线的离心率为

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. 3

4. 已知 p: $\exists x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\sin x>\cos x$,则

A. $\neg p$: $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\sin x\leqslant\cos x$　　B. $\neg p$: $\exists x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\sin x_0<\cos x_0$

C. $\neg p$: $\exists x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\sin x_0\leqslant\cos x_0$　　D. $\neg p$: $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,$\sin x<\cos x$

5. 将函数 $f(x)=\cos\left(mx-\dfrac{\pi}{6}\right)(m>0)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数图象的解析式为

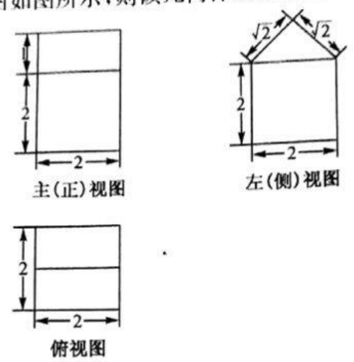
A. $f(x)=\cos\left(mx+\dfrac{m-1}{6}\pi\right)$　　B. $f(x)=\cos mx$

C. $f(x)=\cos\left(mx-\dfrac{m+1}{6}\pi\right)$　　D. $f(x)=\cos\left(mx-\dfrac{\pi}{3}\right)$

6. 已知实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ x+2y<4, \\ x+2y>2, \end{cases}$ 则 $z=x^2+y^2$ 的取值范围是

A. $(4,16)$　　B. $\left(\frac{4}{5},4\right)$　　C. $(2,16)$　　D. $\left(\frac{4}{5},16\right)$

7. 已知某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为



A. 8　　B. 10　　C. 12　　D. 14

8. 已知 P 为等边三角形 ABC 的边 BC 上任一点，则 $\frac{S_1}{S_2}\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$（$S_1$，$S_2$ 分别表示 $\triangle ABP$，$\triangle ABC$ 的面积）的概率为

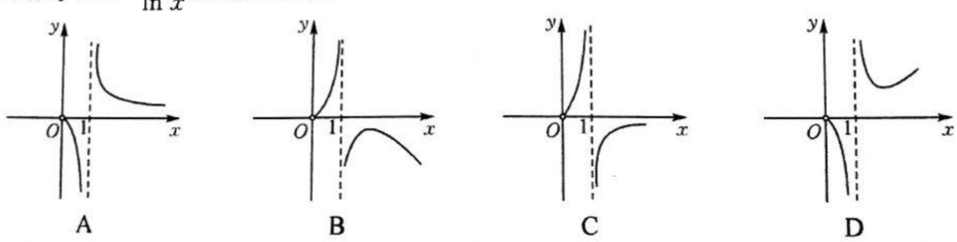
A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{5}{6}$

9. 已知 $f'(x)$ 是定义在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上函数 $f(x)$ 的导函数，且 $f(x)<f'(x)\cdot\tan x$ 恒成立，则

A. $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)>\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $f(1)<2f\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin 1$

C. $\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)>f\left(\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

10. 函数 $f(x)=\frac{2x}{\ln x}$ 的图象大致为



11. 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A,B,C 的正弦值与余弦值分别依次成等差数列与等比数列，则

A. $\triangle ABC$ 为直角三角形　　B. $\triangle ABC$ 为钝角三角形

C. $\triangle ABC$ 不为等腰三角形　　D. $\triangle ABC$ 为等边三角形

12. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 Q 在抛物线 C 上，点 M 在线段 QF 上，且 $|QM|=2|MF|$，则直线 OM 斜率的最大值为

A. $\sqrt{3}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(请将选择题各题答案填在下表中)

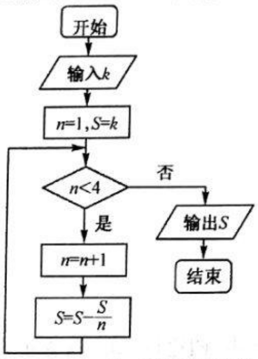
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

得分	评卷人

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知样本 3，4，x，7，5 的平均数是 5，则此样本的方差为__________.

14. 若执行如图所示的程序框图，且输出的 $S=3.5$，则输入 k 的值为__________.



15. 若直线 $l_1:2x-y+4=0$，直线 $l_2:2x-y-6=0$ 都是$\odot M:(x-a)^2+(y-1)^2=r^2$ 的切线，则$\odot M$ 的标准方程为__________.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x\ln x-2x, x>0, \\ x^2+\dfrac{3}{2}x, x\leqslant 0 \end{cases}$ 的图象上有且仅有四个不同的点关于直线 $y=-1$ 的对称点在函数 $y=kx-1$ 的图象上，则实数 k 的取值范围是__________.

得分	评卷人

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17 题～第 21 题为必考题，每个题目考生都必须作答. 第 22 题～第 23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）

已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_na_{n+1}=2^n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $b_n=\log_2 a_n$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，求 S_n.

18.(本小题满分 12 分)

“糖尿病”已经成为日渐多发的一种疾病,其具有危害性大且难以完全治愈的特征.为了更好的抑制“糖尿病”多发的势头,某社区卫生医疗机构针对所服务居民开展了免费测血糖活动,将随机抽取的 10 名居民均分为 A,B 两组(A 组:4.3,5.1,4.6,4.1,4.9;B 组:5.1,4.9,4.0,4.0,4.5).

(1)通过提供的数据请判断哪一组居民的血糖值更低;

(2)现从 B 组的 5 名居民中随机选取 2 名,求这 2 名中至少有 1 名的血糖值低于 4.5 的概率.

19.(本小题满分 12 分)

如图 1,在平面多边形 $BCDEF$ 中,四边形 $ABCD$ 为正方形,$EF\parallel AB$,$AB=2EF=2$,沿着 AB 将图形折成图 2,其中$\angle AED=90^\circ$,$AE=ED$,H 为 AD 的中点.

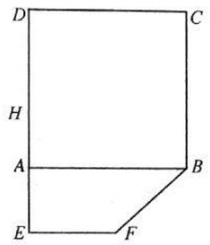


图1

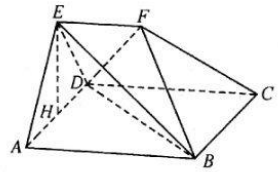


图2

(1)求证:$EH\perp BD$;

(2)求四棱锥 $D-ABFE$ 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

已知直线 $l:\sqrt{2}x-2y+m=0(m\neq 0)$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 交于 A,B 两个不同的点，点$P(\sqrt{2},1)$.

(1)求椭圆 C 的离心率；

(2)若直线 PA、PB 与 x 轴分别交于 C，D 两点，求证：$\triangle PCD$ 为等腰三角形.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(2-a)x-2\ln x+a-2(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$的极值；

(2)若不等式 $f(x)>0$ 对任意 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$恒成立，求 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：极坐标与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\varphi, \\ y=2+2\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$ 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系.

(1)求圆 C 的极坐标方程；

(2)若直线 l 的极坐标方程是 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$，求圆 C 上点到直线 l 距离的最大值.

23.（本题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=\begin{cases} |x+1|, -2\leq x\leq 2, \\ 3-|x|, x<-2 \text{ 或 } x>2. \end{cases}$

(1)求函数 $f(x)$ 的值域；

(2)若关于 x 方程 $f(x)-a=0(a<0)$ 有两个不相等实数根，求 $a+\frac{1}{a}$ 的最大值.

你所选择的题号是 $\boxed{}$ 答案：

(二)

1.A 因为 $A=\{x|-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\}$，$B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，所以 $A\cup B=\{x|-\sqrt{2}<x\leqslant 3\}$，选 A.

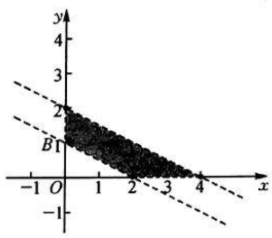
2.D 因为 $z=\frac{3+2i}{2-i}=\frac{(3+2i)(2+i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{6+3i+4i+2i^2}{4-i^2}=\frac{4+7i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{7i}{5}$，所以 $\bar{z}=\frac{4}{5}-\frac{7i}{5}$，$z\cdot\bar{z}=\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{7}{5}\right)^2=\frac{65}{25}=\frac{13}{5}$.

3.C 设双曲线上任意一点的坐标为 (x_0,y_0)，则点 (x_0,y_0) 到双曲线渐近线距离积为 $\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{c^2}$. 又因为 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$，所以 $\frac{a^2b^2}{c^2}=\frac{a^2}{3}$，即 $c=\sqrt{3}b$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}b}{\sqrt{3b^2-b^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

4.A 特称命题的否定为全称命题，且否定结论. 故选 A.

5.A $f(x)=\cos\left[m\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(mx+\frac{m-1}{6}\pi\right)$.

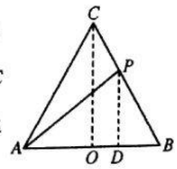
6.D 画出不等式组 $\begin{cases}x>0,\\y>0,\\x+2y<4,\\x+2y>2\end{cases}$ 表示的平面区域如图阴影部分，



$z=x^2+y^2$ 表示区域内的动点 $P(x,y)$ 到原点距离的平方，又原点到直线 $x+2y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，点 $(4,0)$ 到原点距离为 4，所以分析知，x^2+y^2 的取值范围是 $\left(\frac{4}{5},16\right)$.

7.B 由三视图可知，该几何体由两部分组成，其中上面是一个直三棱柱，下面是正方体，该几何体的体积为 $V=2^3+\frac{1}{2}\times1\times2\times2=10$.

8.C 如图，设 $PD\perp AB$，$CO\perp AB$. 当 $S_{\triangle ABP}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$ 时，有 $\frac{1}{2}AB\cdot PD=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}AB\cdot CO$，即 $PD=\frac{2}{3}CO$，则有 $BP=\frac{2}{3}BC$，要使 $S_{\triangle ABP}\leqslant\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$，则点 P 在线段 BP 上，同理，设 BC 的中点为 M，要使 $S_{\triangle ABP}\geqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，则点 P 在线段 MC 上，所以 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ 的概率为 $\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{6}$.



9.D $\because f(x)<f'(x)\cdot\tan x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore f(x)<f'(x)\times\frac{\sin x}{\cos x}$，$\therefore f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$. 令 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$，则 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，$\therefore g\left(\frac{\pi}{3}\right)>g\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$g(1)>g\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$g\left(\frac{\pi}{4}\right)>g\left(\frac{\pi}{6}\right)$，可知 A,B,C 不正确，由 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)>g\left(\frac{\pi}{6}\right)$，可知 D 正确，故选 D.

10.D 由 $\ln x\neq0$，得 $x>0$ 且 $x\neq1$. 当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$，此时 $y<0$，排除 B,C. 函数的导数 $f'(x)=\frac{2\ln x-2x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{2\ln x-2}{(\ln x)^2}$，由 $f'(x)>0$ 得 $\ln x>1$，即 $x>e$，此时函数单调递增，由 $f'(x)<0$ 得 $\ln x<1$，且 $x\neq1$，即 $0<x<1$ 或 $1<x<e$，此时函数在 $(0,1)$ 或 $(1,e)$ 上单调递减，故选 D.

11. D　据题设，得$\begin{cases}2\sin B=\sin A+\sin C, & ①\\ \cos^2 B=\cos A\cdot\cos C. & ②\end{cases}$

$①^2+4\times②$，得$4=(\sin A+\sin C)^2+4\cos A\cdot\cos C$.

$\therefore 4=1-\cos^2 A+1-\cos^2 C+2\cos(A-C)+2\cos A\cdot\cos C$,

$\therefore 2+(\cos A-\cos C)^2=2\cos(A-C)$.

$\because \begin{cases}2+(\cos A-\cos C)^2\geqslant 2,\\ 2\cos(A-C)\leqslant 2,\end{cases}\therefore \begin{cases}2+(\cos A-\cos C)^2=2,\\ 2\cos(A-C)=2.\end{cases}$

又A,C为三角的内角，$\therefore A=C$. 又$2\sin B=\sin A+\sin C$，A,B为三角形ABC内角，$\therefore A=B$. $\therefore\triangle ABC$为等边三角形.

12. D　设$M(x_0,y_0)$，$Q(x,y)$. 又据题设，得$F(1,0)$，$|QF|=2|MF|$，所以$\overrightarrow{QM}=2\overrightarrow{MF}$，即$(x_0-x,y_0-y)=2(1-x_0,-y_0)$，所以$\begin{cases}x_0=\dfrac{x+2}{3},\\ y_0=\dfrac{y}{3}.\end{cases}$因为$k_{OM}=\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{y}{x+2}=\dfrac{y-0}{x+2}$，其几何意义为抛物线上的点与定点$(-2,0)$连线的斜率. 设过定点$(-2,0)$且与抛物线相切的直线方程为$x=my-2$，据$\begin{cases}x=my-2,\\ y^2=4x,\end{cases}$得$y^2-4my+8=0$，由$\Delta=0$，得$m=\sqrt{2}$或$m=-\sqrt{2}$，所以直线$OM$斜率的最大值为$\dfrac{1}{m}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

13. 2　$\dfrac{7+5+x+3+4}{5}=5$，得$x=6$，所以$s^2=\dfrac{(7-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2}{5}=2$.

14. 14　第一次：$n=1$，$S=k$，$1<4$，$n=1+1=2$，$S=S-\dfrac{S}{2}=k-\dfrac{k}{2}=\dfrac{k}{2}$；

第二次：$n=2$，$S=\dfrac{k}{2}$，$2<4$，$n=2+1=3$，$S=S-\dfrac{S}{3}=\dfrac{k}{3}$；

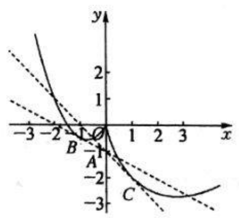
第三次：$n=3$，$S=\dfrac{k}{3}$，$3<4$，$n=3+1=4$，$S=S-\dfrac{S}{4}=\dfrac{k}{4}$，

此时$n<4$不成立，输出$\dfrac{k}{4}=3.5$，则$k=14$.

15. $(x-1)^2+(y-1)^2=5$　由题意，得$|r|=\dfrac{|2a-1+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$，所以$a=1$，$r=\sqrt{5}$，所以圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=5$.

16. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　$\because$函数$f(x)=\begin{cases}x\ln x-2x,x>0,\\ x^2+\dfrac{3}{2}x,x\leqslant 0\end{cases}$的图象上有且仅有四个不同的点关于直线$y=-1$的对称点在函数$y=kx-1$的图象上，函数$y=kx-1$图象关于直线$y=-1$的对称图象为直线$y=-kx-1$，所以函数$f(x)=\begin{cases}x\ln x-2x,x>0,\\ x^2+\dfrac{3}{2}x,x\leqslant 0\end{cases}$的图象与函数$y=-kx-1$图象有且只有四个不同的交点.

作函数$f(x)=\begin{cases}x\ln x-2x,x>0,\\ x^2+\dfrac{3}{2}x,x\leqslant 0\end{cases}$的图象如下图所示：



直线$y=-kx-1$恒过点$A(0,-1)$，设直线AC与曲线$y=x\ln x-2x$相切于点$C(x,x\ln x-2x)$，$y'=\ln x-1$，故$\ln x-1=\dfrac{x\ln x-2x+1}{x}$，所以$x=1$. 故$k_{AC}=-1$；设直线$AB$与曲线$y=x^2+\dfrac{3}{2}x$相切于点$B\left(x,x^2+\dfrac{3}{2}x\right)$，$y'=2x+\dfrac{3}{2}$，故$2x+\dfrac{3}{2}=\dfrac{x^2+\dfrac{3}{2}x+1}{x}$，所以$x=-1$，$x=1$(舍). 故$k_{AB}=-2+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{1}{2}$，所以$-1<-k<$

$-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}<k<1$.

17. 解：(1)因为 $a_na_{n+1}=2^n$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n-1}a_n=2^{n-1}$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=2$， …………………………………… 2分

所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项构成等比数列，偶数项也构成等比数列. …………………………………… 4分

又 $a_1=1, a_2=\frac{2}{a_1}=2$，

所以当 n 为奇数时 $a_n=1\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}=2^{\frac{n-1}{2}}$；当 n 为偶数时，$a_n=2\cdot 2^{\frac{n}{2}-1}=2^{\frac{n}{2}}$，

所以 $a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}}, n\text{ 为奇数},\\ 2^{\frac{n}{2}}, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ …………………………………… 6分

(2)因为 $a_1=1, a_na_{n+1}=2^n, b_n=\log_2 a_n$，所以 $b_n+b_{n+1}=n$. …………………………………… 8分

讨论：

当 n 为奇数时，$S_n=b_1+(b_2+b_3)+(b_4+b_5)+\cdots+(b_{n-1}+b_n)=0+2+4+\cdots+(n-1)=\frac{n^2-1}{4}$； ……… 10分

当 n 为偶数时，$S_n=(b_1+b_2)+(b_3+b_4)+\cdots+(b_{n-1}+b_n)=1+3+\cdots+(n-1)=\frac{n^2}{4}$. ……………… 12分

18. 解：(1)A 组5名居民血糖值的平均数 $\bar{x}_A=\frac{4.3+5.1+4.6+4.1+4.9}{5}=4.6$， …………………………………… 2分

B 组5名居民血糖值的平均数 $\bar{x}_B=\frac{4.5+5.1+4.0+4.0+4.9}{5}=4.5$， …………………………………… 4分

从计算结果看，B 组居民的血糖值更低. …………………………………… 5分

(2)从 B 组5名居民中随机选取2名，基本事件总数为10， …………………………………… 7分

这2名居民中至少有1名的血糖值低于4.5对立事件是这2名居民的视力都不低于4.5，这2名居民的血糖值都不低于4.5，包含的基本事件有(5.1,4.5)，(5.1,4.9)，(4.9,4.5)， …………………………………… 10分

所以这2名居民的血糖值都不低于4.5的概率 $P=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$. …………………………………… 12分

19. 证明：(1)由题可知，$AB\perp EA, AB\perp AD$，且 $EA\cap AD=A$，$EA, AD\subset$ 平面 AED，

所以 $AB\perp$ 平面 AED. …………………………………… 2分

因为 $EH\subset$ 平面 AED，所以 $AB\perp EH$. …………………………………… 3分

因为 $AE=ED$，H 是 AD 的中点，所以 $EH\perp AD$.

又 $AB\cap AD=A$，$AB, AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EH\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………… 5分

又因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EH\perp BD$. …………………………………… 6分

解：(2)$V_{\text{四棱锥}D\text{-}ABFE}=V_{\text{三棱锥}E\text{-}ABD}+V_{\text{三棱锥}B\text{-}EFD}$，其中 $V_{\text{三棱锥}E\text{-}ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AB\times AD\times EH=\frac{1}{6}\times 2\times 2\times 1=\frac{2}{3}$.

…………………………………… 8分

因为 $\frac{S_{\triangle EFD}}{S_{\triangle ECD}}=\frac{1}{2}$，且 $V_{\text{三棱锥}B\text{-}CFD}=V_{\text{三棱锥}E\text{-}ABD}$，所以 $V_{\text{三棱锥}B\text{-}EFD}=\frac{1}{2}V_{\text{三棱锥}B\text{-}CFD}=\frac{1}{2}V_{\text{三棱锥}E\text{-}ABD}$， …………… 10分

所以 $V_{\text{四棱锥}D\text{-}ABFE}=V_{\text{三棱锥}E\text{-}ABD}+V_{\text{三棱锥}B\text{-}EFD}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=1$. …………………………………… 12分

20. 解：(1)由题意可知，$a^2=4, b^2=2$，所以 $c^2=a^2-b^2=2$， …………………………………… 2分

所以椭圆 C 离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………… 4分

证明：(2)由 $\begin{cases}\sqrt{2}x-2y+m=0,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $4x^2+2\sqrt{2}mx+m^2-8=0$. …………………………………… 5分

因为直线 l 与椭圆 C 有两个交点，且直线 l 不过点 P，

所以 $\begin{cases}8m^2-4\times 4(m^2-8)>0,\\ m\neq 0.\end{cases}$ 解得 $-4<m<0$ 或 $0<m<4$. …………………………………… 7分

设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}m, x_1x_2=\frac{m^2-8}{4}, y_1=\frac{\sqrt{2}x_1+m}{2}, y_2=\frac{\sqrt{2}x_2+m}{2}$. ……………… 8分

显然直线 PA 与 PB 的斜率存在，设直线 PA 与 PB 的斜率分别为 k_1, k_2，

则 $k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-\sqrt{2}}+\frac{y_2-1}{x_2-\sqrt{2}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}x_1+m}{2}-1\right)(x_2-\sqrt{2})+\left(\frac{\sqrt{2}x_2+m}{2}-1\right)(x_1-\sqrt{2})}{(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})}$

$=\frac{(\sqrt{2}x_1+m-2)(x_2-\sqrt{2})+(\sqrt{2}x_2+m-2)(x_1-\sqrt{2})}{2(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})}$

$$=\frac{2\sqrt{2}x_1x_2+(m-4)(x_1+x_2)-2\sqrt{2}m+4\sqrt{2}}{2[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]}$$

$$=\frac{\frac{2\sqrt{2}(m^2-8)}{4}-\frac{(m-4)2\sqrt{2}m}{4}-\frac{8\sqrt{2}m}{4}+\frac{16\sqrt{2}}{4}}{2[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2]}=0. \text{……………………………… 10分}$$

因为 $k_1+k_2=0$,所以$\angle PCD=\angle PDC$.

所以$|PC|=|PD|$,即$\triangle PCD$为等腰三角形. ……………………………………

21. 解:(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. ……………………………………………… 12分

……………………………………………………………………………………………… 1分

当$a=1$时,$f(x)=x-1-2\ln x$,$f'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$. ……………………………… 2分

分析知当$x>2$时,$f'(x)>0$;当$0<x<2$时,$f'(x)<0$.

所以$f(x)$存在极小值$f(2)=1-2\ln 2$,不存在极大值. ……………………………… 4分

(2)因为不等式$f(x)>0$对任意$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$恒成立,

所以对任意$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$a>2-\frac{2\ln x}{x-1}$恒成立. ……………………………… 5分

令$l(x)=2-\frac{2\ln x}{x-1}$,$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, ……………………………… 6分

则$l'(x)=-\frac{\frac{2}{x}(x-1)-2\ln x}{(x-1)^2}=\frac{2\ln x+\frac{2}{x}-2}{(x-1)^2}$. ……………………………… 7分

再令$m(x)=2\ln x+\frac{2}{x}-2$,$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,则$m'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{-2(1-x)}{x^2}<0$, ……………… 8分

故$m(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上为减函数,

于是$m(x)>m\left(\frac{1}{2}\right)=2-2\ln 2>0$, ……………………………… 9分

从而$l'(x)>0$,于是函数$l(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上为增函数, ……………………………… 10分

所以$l(x)<l\left(\frac{1}{2}\right)$. ……………………………… 11分

又$l\left(\frac{1}{2}\right)=2-4\ln 2$,故要使$a>2-\frac{2\ln x}{x-1}$恒成立,只需$a\geqslant 2-4\ln 2$,所以$a$的取值范围为$[2-4\ln 2,+\infty)$.

……………………………………………………………………………………………… 12分

22. 解:(1)圆C:$\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\ y=2+2\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$为参数)的普通方程为$x^2+(y-2)^2=4$, ……………………………… 2分

又$x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,所以圆C的极坐标方程为$\rho=4\sin\theta$. ……………………………… 4分

(2)因为$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$,

所以$\rho\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{3}$, ……………………………… 5分

所以$\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-4\sqrt{3}=0$.

即直线l的普通方程为$x+\sqrt{3}y-4\sqrt{3}=0$. ……………………………… 7分

点$C(0,2)$到直线l距离$d=\frac{|1\times 0+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\sqrt{3}$. ……………………………… 9分

所以圆C上点到直线l距离最大值为$2+\sqrt{3}$. ……………………………… 10分

23. 解:(1)当$-2\leqslant x<-1$时,$f(x)=-x-1$,则$f(x)\in(0,1]$; ……………………………… 2分

当$-1\leqslant x\leqslant 2$时,$f(x)=x+1$,则$f(x)\in[0,3]$; ……………………………… 3分

当$x<-2$或$x>2$时,$f(x)\in(-\infty,1)$, ……………………………… 4分

综上,$f(x)$的值域为$(-\infty,3]$. ……………………………… 5分

(2)作出函数$f(x)$的图象,分析知,若方程$f(x)-a=0(a<0)$有两个不相等实数根,则$a<0$. ………… 7分

所以$-a>0$,所以$-a+\left(-\frac{1}{a}\right)\geqslant 2$,当且仅当$a=-1$时,等号成立. ……………………………… 9分

所以$a+\frac{1}{a}$的最大值为-2. ……………………………… 10分