

2018 年高三年级第二学期综合练习数学（理科）

2018.03

（本试卷满分共 150 分，考试时间 120 分钟）

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知全集 $U = \{x \mid x < 5\}$ ，集合 $A = \{x \mid x - 2 \leq 0\}$ ，则 $C_U A =$

- (A) $\{x \mid x \leq 2\}$ (B) $\{x \mid x > 2\}$ (C) $\{x \mid 2 < x < 5\}$ (D) $\{x \mid 2 \leq x < 5\}$

(2) 已知命题 $p: \exists x < 1, x^2 \leq 1$ ，则 $\neg p$ 为

- (A) $\forall x \geq 1, x^2 > 1$ (B) $\exists x < 1, x^2 > 1$

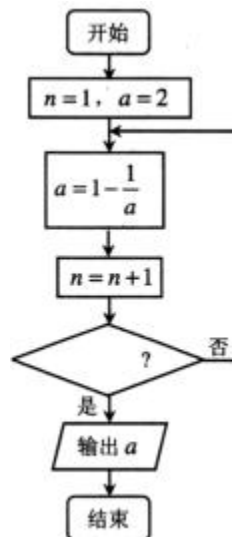
- (C) $\forall x < 1, x^2 > 1$ (D) $\exists x \geq 1, x^2 > 1$

(3) 设不等式组 $\begin{cases} x - 2y \leq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω ，则

- (A) 原点 O 在 Ω 内
(B) Ω 的面积是 1
(C) Ω 内的点到 y 轴的距离有最大值
(D) 若点 $P(x_0, y_0) \in \Omega$ ，则 $x_0 + y_0 \neq 0$

(4) 执行如图所示的程序框图，如果输出的 $a=2$ ，那么判断框中填入的条件可以是

- (A) $n \geq 5$ (B) $n \geq 6$ (C) $n \geq 7$ (D) $n \geq 8$

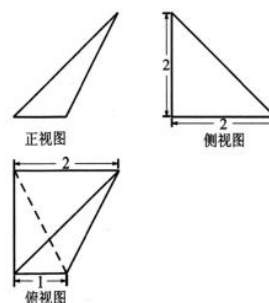


(5) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数)。若以射线 Ox 为极轴建立极坐标系，则曲线 C 的极坐标方程为

- (A) $\rho = \sin \theta$ (B) $\rho = 2 \sin \theta$
(C) $\rho = \cos \theta$ (D) $\rho = 2 \cos \theta$

(6) 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{8}{3}$



(7) 某学校为了弘扬中华传统“孝”文化，共评选出 2 位男生和 2 位女生为校园“孝”之星，现将他们的照片展示在宣传栏中，要求同性别的同学不能相邻，不同的排法种数为
(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 24

(8) 设函数 $f(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{4}) (x \in [0, \frac{9\pi}{16}])$ ，若函数 $y = f(x) + a (a \in \mathbb{R})$ 恰有三个零点 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ ，则 $x_1 + x_2 + x_3$ 的取值范围是

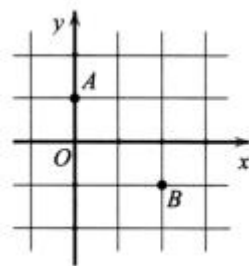
- (A) $[\frac{5\pi}{8}, \frac{11\pi}{16})$ (B) $(\frac{5\pi}{8}, \frac{11\pi}{16}]$ (C) $[\frac{7\pi}{8}, \frac{15\pi}{16})$ (D) $(\frac{7\pi}{8}, \frac{15\pi}{16}]$

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) 如图所示，在复平面内，网格中的每个小正方形的边长

都为 1，点 A, B 对应的复数分别是 z_1, z_2 ，则 $\frac{z_2}{z_1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

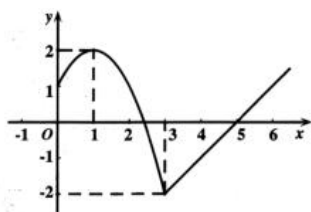


(10) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n$ ，则 $a_3 + a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 已知抛物线 M 的开口向下，其焦点是双曲线 $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ 的一个焦点，则 M 的标准方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 在 $\triangle ABC$ 中， $a=2, c=4$ ，且 $3 \sin A = 2 \sin B$ ，则 $\cos C = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 函数 $y = f(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的偶函数，当 $x \geq 0$ 时，函数 $f(x)$ 的图象是由一段抛物线和一条射线组成（如图所示）.



① 当 $x \in [-1, 1]$ 时， y 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

② 如果对任意 $x \in [a, b] (b < 0)$ ，都有 $y \in [-2, 1]$ ，那么 b 的最大值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 已知 C 是平面 ABD 上一点， $AB \perp AD, CB = CD = 1$.

① 若 $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \underline{\hspace{2cm}}$;

② $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ，则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题共 13 分)

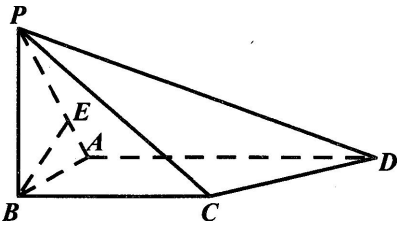
已知函数 $f(x)=2\cos^2x(\frac{\sin x}{\cos x}+1)-1$

- (I) 求 $f(x)$ 的定义域及最小正周期;
 (II) 求 $f(x)$ 的单调递减区间.

(16) (本小题共 14 分)

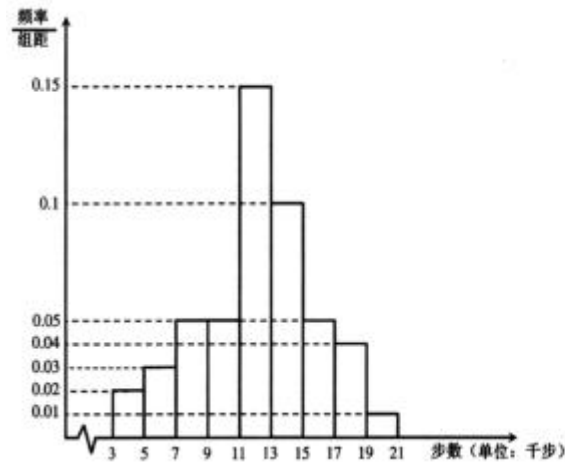
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \perp BC$, $AD \parallel BC$, $AD=3$, $PA=BC=2AB=2$, $PB=\sqrt{3}$.

- (I) 求证: $BC \perp PB$;
 (II) 求二面角 $P-CD-A$ 的余弦值;
 (III) 若点 E 在棱 PA 上，且 $BE \parallel$ 平面 PCD ，求线段 BE 的长.



(17) (本小题共 13 分)

某地区工会利用“健步行 APP”开展健步走积分奖励活动。会员每天走 5 千步可获积分 30 分（不足 5 千步不积分），每多走 2 千步再积 20 分（不足 2 千步不积分）。记年龄不超过 40 岁的会员为 A 类会员，年龄大于 40 岁的会员为 B 类会员。为了解会员的健步走情况，工会从 A, B 两类会员中各随机抽取 m 名会员，统计了某天他们健步走的步数，并将样本数据分为 $[3,5), [5,7), [7,9), [9,11), [11,13), [13,15), [15,17), [17,19), [19,21]$ 九组，将抽取的 A 类会员的样本数据绘制成频率分布直方图，B 类会员的样本数据绘制成频率分布表（如下所示）。



分组	频数	频率
$[3,5)$	10	0.01
$[5,7)$	20	0.02
$[7,9)$	20	0.02
$[9,11)$	30	0.03
$[11,13)$	a	b
$[13,15)$	200	0.2
$[15,17)$	n	0.2
$[17,19)$	100	c
$[19,21]$	20	0.02
合计	m	1.00

(I) 求 m 和 a 的值;

(II) 从该地区 A 类会员中随机抽取 3 名, 设这 3 名会员中健步走的步数在 13 千步以上 (含 13 千步) 的人数为 x , 求 x 的分布列和数学期望;

(III) 设该地区 A 类会员和 B 类会员的平均积分分别为 $\overline{X_1}$ 和 $\overline{X_2}$, 试比较 $\overline{X_1}$ 和 $\overline{X_2}$ 的大小 (只需写出结论).

(18) (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x - a(\ln x + 1) (a \in R)$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若函数 $y = f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上有极值, 求 a 的取值范围.

(19) (本小题共 14 分)

已知点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, $F(1, 0)$ 是椭圆的一个焦点.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 椭圆 C 上不与 P 点重合的两点 D, E 关于原点 O 对称, 直线 PD, PE 分别交 y 轴于 M, N 两点, 求证: 以 MN 为直径的圆被直线 $y = \frac{3}{2}$ 截得的弦长是定值.

(20) (本小题共 13 分)

已知无穷数列 $\{a_n\} (a_n \in Z)$ 的前 n 项和为 S_n , 记 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 中奇数的个数为 b_n .

(I) 若 $a_n = n$, 请写出数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项;

(II) 求证: " a_1 为奇数, $a_i (i = 2, 3, 4, \dots)$ 为偶数" 是 "数列 $\{b_n\}$ 是单调递增数列" 的充分不必要条件;

(III) 若 $a_i = b_i, i = 1, 2, 3, \dots$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.