

# 2012—2013 学年度上学期期末考试

## 高二年级理科 数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的）

1. 集合  $M = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，集合  $N = \{x \mid |x| \geq 2\}$ ，则  $M \cap N =$  ( )

A.  $\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$

B.  $\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x > 3\}$

C.  $\{x \mid 2 \leq x < 3\}$

D.  $\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } -1 < x < 3\}$

2. 命题“ $\forall x \in R, x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定是 ( )

A.  $\exists x \in R, x^2 + x + 1 \leq 0$

B.  $\forall x \in R, x^2 + x + 1 < 0$

C.  $\forall x \in R, x^2 + x + 1 \leq 0$

D.  $\exists x \in R, x^2 + x + 1 < 0$

3. 等比数列  $\{a_n\}$  中，公比  $q > 1$ ，等比数列  $\{a_n\}$  是 ( )

A. 递增数列

B. 递减数列

C. 常数列

D. 无法确定数列增减性

4. 下列结论正确的是 ( )

A. 当  $x > 0$  且  $x \neq 1$  时,  $\lg x + \frac{1}{\lg x} \geq 2$

B. 当  $0 < x \leq 2$  时,  $x - \frac{1}{x}$  无最大值

C. 当  $x \geq 2$  时,  $x + \frac{1}{x}$  的最小值为 2

D. 当  $x > 0$  时,  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$

5. 设  $P$  为双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{12} = 1$  上的一点,  $F_1, F_2$  是该双曲线的两个焦点, 若  $|PF_1| : |PF_2| = 3 : 2$ , 则  $\triangle PF_1F_2$  的面积为 ( )

A.  $6\sqrt{3}$

B. 12

C.  $12\sqrt{3}$

D. 24

6. 椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  上一点  $M$  到一个焦点的距离为 4, 则点  $M$  到另一个焦点的距离为 ( )

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

7. 函数  $y = x + \frac{5}{x-2}$  ( $x > 2$ ) 取得最小值时的  $x$  的值为 ( )

- A.  $2 + \sqrt{5}$       B. 3      C.  $\sqrt{5}$       D. 4

11. 已知  $x, y \in R$ , 则 “ $x \neq 3$  或  $x \neq 5$ ” 是 “ $x + y \neq 8$ ” 的 ( ) 条件

- A. 充分不必要      B. 充要      C. 必要不充分      D. 既不充分也不必要

8. 给出下列命题: (1)  $3 \geq 2$ ; (2)  $\forall x \in R, |x| \geq x$ ; (3) 若  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$  则它们的夹角

为锐角; (4)  $\forall x, y, z \in R, x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$  恒成立; (5) 等比数列  $\{a_n\}$

的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$  ( $m \in N_+$ ) 仍成等比. 其中真命题的个数是 ( )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

9. 实数  $x, y$ , 不等式组  $\begin{cases} x \geq 1 \text{ 且 } y \leq 2 \\ y \geq kx - 3k + 2 \end{cases}$  所确定的可行域内, 若目标函数  $z = y - x$  仅在

点  $(3, 2)$  取得最小值, 则实数  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $(0, 2)$       B.  $(1, 2)$       C.  $[0, 1)$       D.  $(0, 1)$

10. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_4 = S_8 > 0$ , 则 ( )

- A.  $S_{12} = 0$       B. 公差  $d > 0$       C.  $a_6 = 0$       D.  $S_4 > S_5$

12. 一只酒杯的轴截面是抛物线的一部分, 它的函数解析式是  $y = \frac{x^2}{2}$  ( $0 \leq y \leq 20$ ), 在杯

内放一个玻璃球, 要使球触及酒杯底部, 则玻璃球的半径  $r$  的取值范围是 ( )

- A.  $0 < r \leq \frac{1}{2}$       B.  $0 < r \leq 1$       C.  $0 < r \leq \frac{3}{2}$       D.  $0 < r \leq 2$

## 二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 数列  $\{a_n\}$  中,  $a_n = 33 - \frac{n^2}{2}$ , 则前  $n$  项和  $S_n$  有最大值时,  $n =$ \_\_\_\_\_.

14. 点  $A(3, 0, 5)$ 、 $B(2, 3, 0)$ 、 $C(0, 5, 0)$ 、 $D(1, 2, z)$  四点共面, 则  $z =$ \_\_\_\_\_.

15. 设集合  $A = \{(x, y) | x, y, 1 - x - y \text{ 是三角形的三边长}\}$ , 则  $A$  所表示的平面区域的面

积是\_\_\_\_\_.

16. 过抛物线  $x^2=2py(p>0)$  的焦点  $F$  作倾斜角为  $30^\circ$  的直线, 与抛物线分别交于  $A$ 、 $B$  两

点(点  $A$  在  $y$  轴左侧), 则  $\frac{|FB|}{|AF|} =$ \_\_\_\_\_.

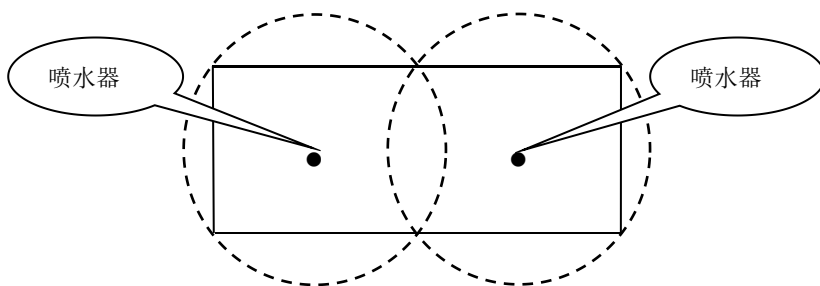
三、解答题(本大题共 6 小题, 满分 70 分. 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知关于  $x$  的方程  $(m^2-1)x^2-(m+1)x-2=0$  ( $x \in R$ ), 若方程的两根一个比  $-1$  大, 一个比  $-1$  小, 求实数  $m$  的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

如图所示, 校园内计划修建一个矩形花坛并在花坛内装置两个相同的喷水器. 已知喷水器的喷水区域是半径为  $5m$  的圆. 问如何设计花坛的尺寸和两个喷水器的位置, 才能使花坛的面积最大且能全部喷到水?



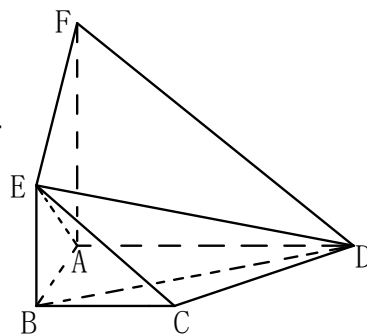
19. (本小题满分 12 分)

如图, 平面  $ABEF \perp$  平面  $ABCD$ , 四边形  $ABEF$  与  $ABCD$  都是直角梯形,

$\angle BAD = \angle FAB = 90^\circ$ ,  $BC \parallel \frac{1}{2}AD$ ,  $BE \parallel \frac{1}{2}AF$ .

(I) 证明:  $C, D, F, E$  四点共面;

(II) 设  $AB = BC = BE$ , 求二面角  $A-ED-B$  的大小.



20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线  $y^2 = 4x$ ，点  $F$  是抛物线的焦点，点  $M$  在抛物线上， $O$  为坐标原点.

(I) 当  $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{OM} = 4$  时，求点  $M$  的坐标；

(II) 求  $\frac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{FM}|}$  的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $S_n = 2a_n - 2$  ( $n = 1, 2, 3 \cdots$ )，数列  $\{b_n\}$  中， $b_1 = 1$ ，

点  $P(b_n, b_{n+1})$  在直线  $x - y + 2 = 0$  上.

(I) 求数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  的通项  $a_n$  和  $b_n$ ；

(II) 设  $c_n = a_n b_n$ ，求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ ，并求满足  $T_n < 448$  的最大正整数  $n$  .

22. (本小题满分 12 分)

已知点  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心， $A(0, -2)$ ， $B(0, 2)$ ，在  $x$  轴上有一点  $M$  满足： $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$ ，

$\overrightarrow{GM} = \lambda \overrightarrow{AB}$  ( $\lambda \in R$ ).

(I) 求点  $C$  的轨迹方程；

(II) 直线  $l$  与  $C$  的轨迹交于  $P$ 、 $Q$  两点，弦  $PQ$  的中点坐标为  $(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ ，求弦长  $|PQ|$ .