2015—2016 学年度上学期期末考试高二年级

数学（理科）参考答案及评分标准

一、选择题：

1.B 2. C 3 .A 4. C 5.D 6. C 7.A 8.B 9.D 10.A 11. A 12. B

二、填空题：

13. $x^2 - y^2 = 1$

14. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

15. 16

16. $S_n = \dfrac{n(n+4)}{3}$

三、解答题（本大题共 6 道小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. 解：$\because p \vee q$ 为真，$p \wedge q$ 为假 $\therefore p, q$ 一真一假.

由题设知, 对于条件 p

$\because m \in [-1,1] \therefore m + 2 \in [1,3]$

$\because$ 不等式 $a^2 - 5a + 5 \geq 1$ 成立,

$\therefore a^2 - 5a + 4 \geq 0$，解得 $a \leq 1$ 或 $a \geq 4$ ………………………………4 分

对于条件 q

$\because a^2 + ax + 2 = 0$ 有两个负数解，

$\therefore \begin{cases} \Delta = a^2 - 8 \geq 0 \\ x_1 + x_2 = -a < 0 \end{cases}$，$\therefore a \geq 2\sqrt{2}$ ……………………………………………8 分

若 p 真 q 假，则 $a \leq 1$；若 p 假 q 真，则 $2\sqrt{2} \leq a < 4$

$\therefore a$ 的取值范围是: $a \leq 1$ 或 $2\sqrt{2} \leq a < 4$ ………………………………10 分

18. 解：（Ⅰ）$\because$ 平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PCD\bigcap$ 平面 $ABCD=CD$，

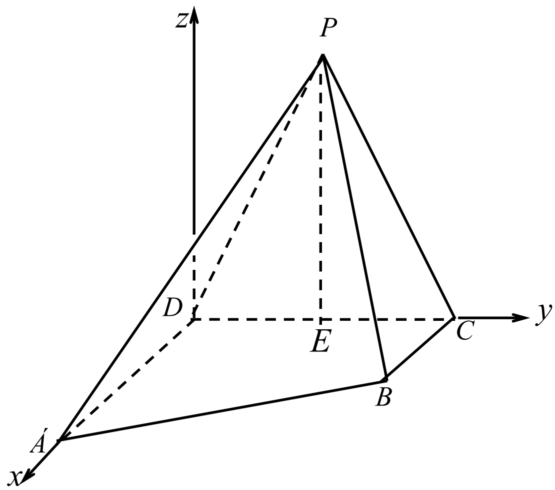
$BC\perp CD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore BC\perp$ 平面 PCD，

又 $PC\subset$ 平面 PCD

$\therefore BC\perp PC$，

同理 $AD\perp PD$ ……………………2 分



设等边 ΔPCD 的边长为 x，

则 $Rt\Delta PBC$ 中，$PB^2=PC^2+BC^2=x^2+(\sqrt{2})^2=x^2+2$

$Rt\Delta PAD$ 中，$PA^2=PD^2+AD^2=x^2+(2\sqrt{2})^2=x^2+8$

直角梯形 $ABCD$ 中，$AB^2=CD^2+(AD-BC)^2=x^2+(\sqrt{2})^2=x^2+2$

$\because AB\perp PB\quad\therefore PA^2=AB^2+PB^2$

$\therefore x^2+8=(x^2+2)+(x^2+2)$ 解得 $x=2$ …………………………………………4 分

作 $PE\perp CD$，垂足为 E，连接 AE

$\because \Delta PCD$ 是等边三角形　$\therefore PE=\sqrt{3}$，且 E 为 CD 中点

由平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，同理可得 $PE\perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot PE\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot 2=\sqrt{6}$ ……………6 分

（Ⅱ）如图，以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴的正方向建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

则 $A(2\sqrt{2},0,0)$，$B(\sqrt{2},2,0)$，$P(0,1,\sqrt{3})$

设平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\vec{n}\cdot(2\sqrt{2},-1,-\sqrt{3})=0\\ \vec{n}\cdot(-\sqrt{2},2,0)=0\end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 2\sqrt{2}x - y - \sqrt{3}z = 0 \\ -\sqrt{2}x + 2y = 0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x = \sqrt{2}y \\ z = \sqrt{3}y \end{cases}$

令 $y=1$，得 $\vec{n} = (\sqrt{2}, 1, \sqrt{3})$ ……………………………………8 分

又平面 $ABCD$ 的一个法向量 $\vec{p} = (0,0,1)$

$\therefore \cos < \vec{n}, \vec{p} > = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………………………10 分

结合图形可知，二面角 $P-AB-D$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$ ……………………………12 分

19. 解：（Ⅰ）$\because S_n = \dfrac{3}{2}a_n - \dfrac{1}{2} \ (n \in N^*)$ ①

当 $n=1, S_1 = \dfrac{3}{2}a_1 - \dfrac{1}{2}, \therefore a_1 = 1$

当 $n \ge 2, \because S_{n-1} = \dfrac{3}{2}a_{n-1} - \dfrac{1}{2}$ ②

①−②：$a_n = \dfrac{3}{2}a_n - \dfrac{3}{2}a_{n-1}$ ，即：$a_n = 3a_{n-1} \ (n \ge 2)$ ……………………………4 分

又 $\because a_1 = 1 \ \therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ 对 $n \in N^*$ 都成立，所以 $\{a_n\}$ 是等比数列，

$\therefore a_n = 3^{n-1}$ （$n \in N^*$） ……………………………………………………6 分

（Ⅱ）$\because a_n b_n = \dfrac{3^n}{n^2+n}$ $\therefore b_n = \dfrac{3}{n^2+n}$ $\therefore T_n = 3(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1})$

$\therefore T_n = 3(1 - \dfrac{1}{n+1}) = 3 - \dfrac{3}{n+1}$ ……………………………………………………8 分

$\because \dfrac{3}{n+1} > 0$, $\therefore T_n < 3$ 对 $n \in N^*$ 都成立……………………………………………10 分

$\therefore 3 \le c^2 - 2c \ \therefore c \ge 3$或$c \le -1$

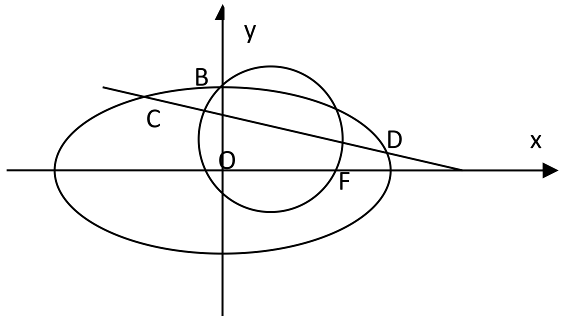
$\therefore$ 实数 c 的取值范围为 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. ……………………………………12 分

20．解：

（Ⅰ）∵圆 G：$x^2+y^2-x-\sqrt{3}y=0$ 经过点 F,B．

$\therefore F(1,0),B(0,\sqrt{3})$，

$\therefore c=1$，$b=\sqrt{3}$． $\therefore a^2=4$．



故椭圆的方程为

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．…………4 分

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=-(x-m)(m>2)$．

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=-(x-m)\end{cases}$ 消去 y 得 $7x^2-8mx+(4m^2-12)=0$．

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8m}{7}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{7}$，………6 分

$\therefore y_1y_2=[-(x_1-m)]\cdot[-(x_2-m)]=x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2$．

$\because \overrightarrow{FC}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{FD}=(x_2-1,y_2)$ ………………………………8 分

$\therefore \overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2$

$=x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2$

$=2x_1x_2-(m+1)(x_1+x_2)+1+m^2=\dfrac{7m^2-8m-17}{7}$ ………………………10 分

∵点 F 在圆 G 的内部，$\therefore \overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{FD}<0$， 即 $\dfrac{7m^2-8m-17}{7}<0$，

解得 $\dfrac{4-3\sqrt{15}}{7}<m<\dfrac{4+3\sqrt{15}}{7}$

由△$=64m^2-28(4m^2-12)>0$，解得$-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$.

又$m>2$，$\therefore 2<m<\dfrac{4+3\sqrt{15}}{7}$. ……………………………………12 分

21.解：（Ⅰ）由$a_3=3$，$a_6=31$，得$a_3+1=4$，$a_6+1=32$ ，

所以$a_n+1=2^{n-1}$　　$\therefore a_n=2^{n-1}-1$ ……………………………2 分

由$nS_{n+1}-(n+1)S_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$得，$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1}{2}$，

故$\{\dfrac{S_n}{n}\}$是以$\dfrac{S_1}{1}=1$为首项，$\dfrac{1}{2}$为公差的等差数列，

则$\dfrac{S_n}{n}=1+\dfrac{1}{2}(n-1)$，所以$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$， ……………………………………4 分

当$n\ge 2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{n(n-1)}{2}=n$，

因为$b_1=1$满足该式，所以$b_n=n$ ……………………………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知$c_n=\dfrac{b_n}{a_n+1}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$ 所以不等式$T_n\ge m-\dfrac{9}{2^n}$，

即为$1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}\ge m-\dfrac{9}{2^n}$，

令$R_n=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$，则$\dfrac{1}{2}R_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}\cdots+\dfrac{n}{2^n}$，

两式相减得

$(1-\dfrac{1}{2})R_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$，

所以$R_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$ ……………………………………………8 分

由$R_n\ge m-\dfrac{9}{2^n}$恒成立，即$4-\dfrac{2n-5}{2^n}\ge m$恒成立，

又$(4-\dfrac{2n-3}{2^{n+1}})-(4-\dfrac{2n-5}{2^n})=\dfrac{2n-7}{2^{n+1}}$，

故当$n\le 3$时，$\{4-\dfrac{2n-5}{2^n}\}$单调递减；当$n=3$时，$4-\dfrac{2\times 3-5}{2^3}=\dfrac{31}{8}$；

当$n\ge 4$时，$\{4-\frac{2n-5}{2^n}\}$单调递增；当$n=4$时，$4-\frac{2\times 4-5}{2^4}=\frac{61}{16}$；

则$4-\frac{2n-5}{2^n}$的最小值为$\frac{61}{16}$，

所以实数m的最大值是$\frac{61}{16}$ ……………………………………………12 分

22. 解：（Ⅰ）依题意可得$A(-1,0)$，$B(1,0)$.

设椭圆M的方程为$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1\left(b>1\right)$，

因为椭圆M的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\frac{\sqrt{b^2-1}}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$b^2=2$.

所以椭圆M的方程为$x^2+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………2 分

证法 1：设点$P(x_1,y_1)$、$T(x_2,y_2)$（$x_i>0$，$y_i>0$，$i=1,2$），直线AP的斜率为k（$k>0$），

则直线AP的方程为$y=k(x+1)$，联立方程组

$\begin{cases} y=k\left(x+1\right), \\ x^2+\frac{y^2}{2}=1. \end{cases}$ 整理，得$\left(2+k^2\right)x^2+2k^2x+k^2-2=0$，………………4 分

解得$x=-1$或$x=\frac{2-k^2}{2+k^2}$. 所以$x_2=\frac{2-k^2}{2+k^2}$.

同理可得，$x_1=\frac{2+k^2}{2-k^2}$…所以$x_2=\frac{1}{x_1}$. ………………………………6 分

证法 2：设点$P(x_1,y_1)$、$T(x_2,y_2)$（$x_i>0$，$y_i>0$，$i=1,2$），

则$k_{AP}=\frac{y_1}{x_1+1}$，$k_{AT}=\frac{y_2}{x_2+1}$. 因为$k_{AP}=k_{AT}$，

所以$\frac{y_1}{x_1+1}=\frac{y_2}{x_2+1}$，即$\frac{{y_1}^2}{\left(x_1+1\right)^2}=\frac{{y_2}^2}{\left(x_2+1\right)^2}$.

因为点P和点T分别在双曲线和椭圆上，所以${x_1}^2-\frac{{y_1}^2}{2}=1$，${x_2}^2+\frac{{y_2}^2}{2}=1$.

即${y_1}^2=2\left({x_1}^2-1\right)$，${y_2}^2=2\left(1-{x_2}^2\right)$. 所以$\frac{2\left({x_1}^2-1\right)}{\left(x_1+1\right)^2}=\frac{2\left(1-{x_2}^2\right)}{\left(x_2+1\right)^2}$，

即$\frac{x_1-1}{x_1+1}=\frac{1-x_2}{x_2+1}$. 所以$x_2=\frac{1}{x_1}$. ……………………………………6 分

（Ⅱ）**解**：设点$P(x_1,y_1)$、$T(x_2,y_2)$（$x_i>0$，$y_i>0$，$i=1,2$），

则 $\overrightarrow{PA}=\left(-1-x_1,-y_1\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(1-x_1,-y_1\right)$.

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 9$，所以 $\left(-1-x_1\right)\left(1-x_1\right)+{y_1}^2\le 9$，即 ${x_1}^2+{y_1}^2\le 10$.

因为点 P 在双曲线上，则 ${x_1}^2-\dfrac{{y_1}^2}{2}=1$，

所以 ${x_1}^2+2{x_1}^2-2\le 10$，即 ${x_1}^2\le 4$.

因为点 P 是双曲线在第一象限内的一点

所以 $1<x_1\le 2$.　　　　··8 分

因为 $S_1=\dfrac{1}{2}|AB||y_2|=|y_2|$，$S_2=\dfrac{1}{2}|OB||y_1|=\dfrac{1}{2}|y_1|$，

所以 ${S_1}^2\cdot{S_2}^2={y_2}^2\cdot\dfrac{1}{4}{y_1}^2=\dfrac{\left(2-2{x_2}^2\right)({x_1}^2-1)}{2}=\left(1-{x_2}^2\right)({x_1}^2-1)$.

由（Ⅰ）知，$x_2=\dfrac{1}{x_1}$. 设 $t={x_1}^2$，则 $1<t\le 4$，${S_1}^2\cdot{S_2}^2=t+\dfrac{1}{t}-2$.

因为 $f(t)=t+\dfrac{1}{t}$ 在区间 $\left(1,4\right]$ 上单调递增，$f(t)_{\max}=f(4)$.

所以 ${S_1}^2\cdot{S_2}^2=t+\dfrac{1}{t}-2\le\dfrac{9}{4}$

即当 $x_1=2$ 时，$\left(S_1\cdot S_2\right)_{\max}=\dfrac{3}{2}$　　　　···12 分