

一.选择题 CCADAD ACCCDA

二.填空题 13. 12 14. $\frac{\pi}{4}$ 15. $[-\sqrt{2}-1, \frac{5}{4}]$ 16. $\sqrt{abcd}$

17. (1) $f(x) = 2\cos^2 x - 1 + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$

$$= 2(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$$

所以 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ -----5 分

(2) 令 $2x + \frac{\pi}{6} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$, 解之得 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \quad k \in \mathbb{Z}$ 。

由已知 $k = 2$ 时, $x = \frac{11\pi}{12}$

所以 y 轴右侧第二个对称中心是 $(\frac{11\pi}{12}, 0)$ -----10 分

18. (1) 乙任意拿出两张卡片。基本事件为: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\},$

$\{2,4\}, \{3,4\}$, 共 6 个, 而且这些基本事件的出现是等可能的。

用 A 表示“和为奇数”这一事件, 则 A 包含的基本事件有 $\{1,2\}, \{1,4\},$

$\{2,3\}, \{3,4\}$, 共 4 个, 所以 $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ -----6 分

(2) 甲、乙各拿出一张卡片。基本事件为: $\{2,1\}, \{2,2\}, \{2,3\}, \{2,4\},$

$\{3,1\}, \{3,2\}, \{3,3\}, \{3,4\}$, 共 8 个, 而且这些基本事件的出现是等可能的。

用 B 表示“乙获胜”这一事件, 则 B 包含的基本事件有 $\{2,3\}, \{2,4\},$

$\{3,4\}$, 共 3 个, 所以 $P(B) = \frac{3}{8}$ -----12 分

19. (1) 由 $x = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|}$, $y = \frac{\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|}$, 及 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$ 则

$$x - y = \frac{\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} - \frac{\vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{1 + \vec{a} \cdot \vec{b} - (1 + \vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|} = 0$$

所以 $x = y$ -----6 分

(2) 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 θ ，由已知 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$ 又 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 1 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2 + 2\cos\theta$ 所以 $\cos\theta = 1$.

所以 $\theta = 0$ ，所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向，又 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，所以 $\vec{a} = \vec{b}$

所以 $\vec{a} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ -----12 分

20. (1) 连接 BD ，则 $\angle BDC = \frac{\pi}{4}$ ，设 $\angle ADB = \theta$ ，则

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{10}, \cos\theta = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \text{则 } \cos\angle ADC = \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{5}, \text{所以}$$

$$AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2DA \cdot DC \cos\angle ADC = 32 \text{ 所以 } AC = 4\sqrt{2}$$

-----6 分

(2) 延长 AB 、 BC 交于点 G ， $\cos\angle AGD = \sin\angle ADC = \frac{4}{5}$ ，

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}}{2}, \overrightarrow{EF}^2 = \frac{\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2}{4}, \overrightarrow{EF}^2 = \frac{17}{2},$$

所以 $|\overrightarrow{EF}| = \frac{\sqrt{34}}{2}$ -----12 分

21. (1) 设 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向夹角为 θ ，则 $\cos\theta = \frac{4}{5}, \sin\theta = \frac{3}{5}$ ，已知

$$\angle POQ = \frac{\pi}{3}, OQ = 2, \text{所以 } x_Q = 2\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{5}, \text{同理}$$

$$y_Q = 2\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{5}, \text{所以 } Q(\frac{4 - 3\sqrt{3}}{5}, \frac{3 + 4\sqrt{3}}{5}) \text{ ---6 分}$$

(2)已知 $\tan \angle QPR \cdot \tan \angle QRP = 1$, 所以

$$\cos \angle QRP \cdot \cos \angle QPR - \sin \angle QRP \cdot \sin \angle QPR = 0 , \text{ 即}$$

$$\cos(\angle QRP + \angle QPR) = 0 , \text{ 即 } \cos(\pi - \angle PQR) = 0$$

$$\text{所以 } \cos \angle PQR = 0 , \quad 0 < \angle PQR < \pi , \quad \angle PQR = \frac{\pi}{2} .$$

$$QP^2 = OQ^2 + OP^2 - 2OQ \cdot OP \cos \angle POQ = \sqrt{3} , \text{ 则}$$

$$QP^2 + OP^2 = OQ^2 \quad \text{所以 } \angle OPQ = \frac{\pi}{2} , \quad \text{所以 } OP \parallel QR$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OPR} = \frac{1}{2} PO \cdot PQ = \frac{1}{2} 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{-----12 分}$$

22. (1)假设 π 是 $f(x)$ 的周期, 则 $f(0) = f(\pi)$, $f(0) = 1, f(\pi) = 0$,

显然 $f(0) \neq f(\pi)$, 所以假设不成立, 所以 π 不是 $f(x)$ 的周期. ---3 分

$$(2) a = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in Z, \text{ 则 } a_1 = \frac{\pi}{4}, a_2 = \frac{5\pi}{4}, a_3 = \frac{9\pi}{4}, \text{ 所以}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{15\pi}{4}, \text{ 则 } f(a_1 + a_2 + a_3) = f\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{-----6 分}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \cos x & x \in \left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right] & k \in Z \\ \sin x & x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right] & k \in Z \\ \cos x & x \in \left[2k\pi + \frac{5\pi}{4}, 2k\pi + 2\pi\right] & k \in Z \end{cases} , \quad f(x) \text{ 的}$$

$$\text{值域为 } \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], \text{ 设 } y = \frac{\sin x}{\cos x - m}, \text{ 则 } \sin x - y \cos x = -ym , \text{ 所以}$$

$1+(-y)^2 \geq (-ym)^2$, 解之得 $-\frac{1}{\sqrt{m^2-1}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{m^2-1}}$, 即 $g(x)$ 的

值域为 $[-\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}, \frac{1}{\sqrt{m^2-1}}]$, 由题可知, $f(x)$ 的值域与 $g(x)$ 的

值域有交集.

$1 < m < \sqrt{2}$ 时, $\frac{1}{\sqrt{m^2-1}} > 1$, 则 $-\frac{1}{\sqrt{m^2-1}} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 整理得

$m^2 \geq 3$, 显然无解;

$m \geq \sqrt{2}$ 时, $\frac{1}{\sqrt{m^2-1}} \leq 1$, 满足题意.

综上所述, m 的范围是 $[\sqrt{2}, +\infty)$ -----12 分