

2012-2013 学年度下学期期末考试高二年级数学文科试题

参考答案

一. 选择题

- (1) B (2) C (3) D (4) C (5) A (6) D
 (7) B (8) B (9) A (10) D (11) B (12) A

二. 填空题

- (13) $2 < a < \frac{18}{7}$ (14) 2 (15) 21^2 (16) $\{x|x > 4\}$

三. 解答题

(17) 解: 由 $|x+2| \geq 3$ 得 $x \geq 1$ 或 $x \leq -5$, 故 $(C_R A) = (-5, 1) \dots\dots\dots 2$ 分

(I) 因为 $(C_R A) = (-5, 1)$, 由 $(C_R A) \subseteq B$ 知 $B = (-3m, 2) \dots\dots\dots 4$ 分

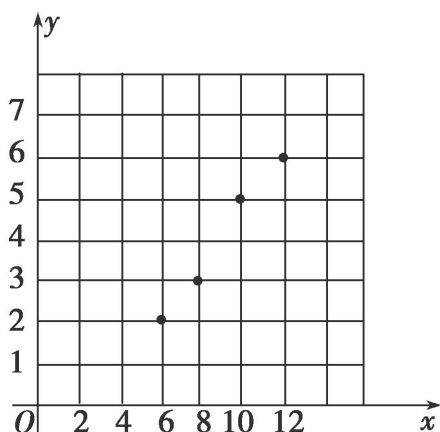
且 $-3m \leq -5$, 解得 $m \geq \frac{5}{3} \dots\dots\dots 6$ 分

(II) 因为 $(C_R A) \cap B = (-1, n)$, 所以 -1 是 $(x+3m)(x-2) = 0$ 的根,

代入即 $m = \frac{1}{3}$. 此时 $(x+1)(x-2) < 0$ 的解为 $-1 < x < 2$,

所以 $(C_R A) \cap B = (-1, 1)$, 即 $n = 1. \dots\dots\dots 12$ 分

(18) (I) 如图所示.



$\dots\dots\dots 3$ 分

$$(\text{II}) \sum_{i=1}^4 x_i y_i = 6 \times 2 + 8 \times 3 + 10 \times 5 + 12 \times 6 = 158,$$

$$\bar{x} = \frac{6+8+10+12}{4} = 9, \quad \bar{y} = \frac{2+3+5+6}{4} = 4,$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 = 344,$$

$$\hat{b} = \frac{158 - 4 \times 9 \times 4}{344 - 4 \times 9^2} = \frac{14}{20} = 0.7, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \bar{b} \bar{x} = 4 - 0.7 \times 9 = -2.3, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{故线性回归方程为 } \hat{y} = 0.7x - 2.3. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(III) 由回归直线方程预测, 记忆力为 11 的学生的判断力约为 5.4. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

$$(19) \text{ 解: } (\text{I}) \text{ 由题知 } f'(x) = x^2 - (2a+1)x + (a^2 + a) = (x-a)[x-(a+1)]$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得 } x_1 = a+1, x_2 = a, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, a+1)$	$a+1$	$(a+1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $a = 1$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(\text{II}) \quad f'(x) = \left(x - \frac{2a+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

因为 $\forall m \in R$, 直线 $y = kx + m$ 都不是曲线 $y = f(x)$ 的切线,

$$\text{所以 } \left(x - \frac{2a+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = k \text{ 无实数解,}$$

只要 $f'(x)$ 的最小值 $-\frac{1}{4}$ 大于 k 即可,

$$\text{所以 } k < -\frac{1}{4}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

(20) 解: (I) 30 位亲属中 50 岁以上的人多以食蔬菜为主, 50 岁以下的人多以食肉为主. 2 分

(II) 列联表如表所示:

	主食蔬菜	主食肉类	合计
50 岁以下	4	8	12
50 岁以上	16	2	18
合计	20	10	30

..... 6 分

$$(III) K^2 = \frac{30 \times (8 - 12)^2}{12 \times 18 \times 20 \times 10} = \frac{30 \times 120 \times 120}{12 \times 18 \times 20 \times 10} = 10 > 6.635, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由附表知, 有 99% 的把握认为 “其亲属的饮食习惯与年龄有关”. 12 分

(21) 解: (I) $f'(x) = 2x + a - \frac{1}{x} \leq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立

$$\Rightarrow a \leq \frac{1}{x} - 2x \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上恒成立}$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{1}{x} - 2x, \text{ 则 } h'(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0$$

$$\text{所以 } h(x) \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上递减, 即 } h(x)_{\min} = h(2) = -\frac{7}{2} \quad \text{-----4 分}$$

(II) 假设存在实数 a , 使 $g(x) = ax - \ln x (x \in (0, e])$ 有最小值 3

$$g'(x) = \frac{ax - 1}{x}$$

$$\text{①当 } a \leq 0 \text{ 时, } g(x) \text{ 在 } (0, e] \text{ 上单调递减, } g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 3 \Rightarrow a = \frac{4}{e} \text{ (舍);}$$

$$\text{②当 } \frac{1}{a} \geq e \text{ 时, } g(x) \text{ 在 } (0, e] \text{ 上单调递减, } g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 3 \Rightarrow a = \frac{4}{e} \text{ (舍);}$$

$$\text{③当 } 0 < \frac{1}{a} < e \text{ 时, } g(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{a}\right) \text{ 上单调递减, 在 } \left[\frac{1}{a}, e\right] \text{ 上单调递增}$$

$$\Rightarrow g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \ln \frac{1}{a} = 3 \Rightarrow a = e^2 \text{ (成立) 综上: } a = e^2 \quad \text{-----8 分}$$

(III) 令 $F(x) = e^2x - \ln x$, 由 (II) 可知 $F(x)_{\min} = 3$;

令 $G(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2}$, 则 $G'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 又 $x \in (0, e]$

所以 $G'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$, 即 $G(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增.

即 $G(x)_{\max} = G(e) = \frac{1}{e} + \frac{5}{2} < 3$ 即 $e^2x - \ln x > \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2}$

即 $e^2x^2 - \frac{5}{2}x > (x+1)\ln x$ -----12 分

(22) 解: (I) 证明: 连结 OP, OM

因为 AP 与圆 O 相切于点 P , 所以 $OP \perp AP$.

因为 M 是圆 O 的弦 BC 的中点, 所以 $OM \perp BC$.

于是 $\angle OPA + \angle OMA = 180^\circ$.

由圆心 O 在 $\angle PAC$ 的内部, 可知四边形 $APOM$ 的对角互补,

所以 A, P, O, M 四点共圆 -----5 分

(II) 解: 由 (I) 得 A, P, O, M 四点共圆, 所以 $\angle OAM = \angle OPM$.

由 (I) 得 $OP \perp AP$

由圆心 O 在 $\angle PAC$ 的内部, 可知 $\angle OPM + \angle APM = 90^\circ$

所以 $\angle OAM + \angle APM = 90^\circ$ -----10 分

(23) 解: (I) 由 $\rho = 2\sqrt{5} \sin \theta$ 得 $x^2 + y^2 - 2\sqrt{5}y = 0$

即 $x^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 5$ -----5 分

(II) 将 l 的参数方程代入圆 C 的直角坐标方程, 得 $(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 = 5$,

即 $t^2 - 3\sqrt{2}t + 4 = 0$ 由于 $\Delta > 0$, 故可设 t_1, t_2 是上述方程的两实根,

所以 $\begin{cases} t_1 + t_2 = 3\sqrt{2} \\ t_1 t_2 = 4 \end{cases}$, 直线又过 $(3, \sqrt{5})$, 故由上式及 t 的几何意义得:

$$|PA| + |PB| = |t_1| + |t_2| = t_1 + t_2 = 3\sqrt{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$(24) \quad (I) \text{ 证明: } y - \sqrt{3} = 1 + \frac{2}{1+x} - \sqrt{3} = \frac{(1-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{1+x}$$

因为 $x > \sqrt{3}$, 所以 $y - \sqrt{3} < 0$, 即 $y < \sqrt{3}$ 得证. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$(II) \quad |y - \sqrt{3}| - |x - \sqrt{3}| = \left| \frac{(1-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{1+x} \right| - |x - \sqrt{3}|$$

$$= |x - \sqrt{3}| \left(\frac{\sqrt{3}-1}{1+x} - 1 \right) = |x - \sqrt{3}| \frac{\sqrt{3}-2-x}{1+x}$$

因为 $\sqrt{3}-2 < 0$, $x > 0$, 所以 $\frac{\sqrt{3}-2-x}{1+x} < 0$

而 $x - \sqrt{3} > 0$, 故 $|y - \sqrt{3}| - |x - \sqrt{3}| < 0$, 即 $|y - \sqrt{3}| < |x - \sqrt{3}|$

所以 y 比 x 更接近于 $\sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$