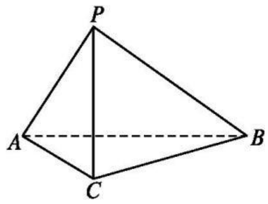
题型练 6　大题专项(四)
立体几何综合问题

1.

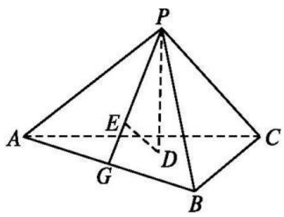


如图,在三棱锥 P-ABC 中,$AC=BC=2$,$\angle ACB=90°$,$AP=BP=AB$,$PC\perp AC$.

(1)求证:$PC\perp AB$;

(2)求点 C 到平面 APB 的距离.

2.

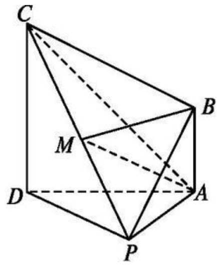


如图,已知正三棱锥 P-ABC 的侧面是直角三角形,$PA=6$.顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D,D 在平面 PAB 内的正投影为点 E,连接 PE 并延长交 AB 于点 G.

(1)证明:G 是 AB 的中点;

(2)作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F(说明作法及理由),并求四面体 $PDEF$ 的体积.

3.

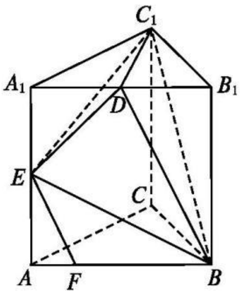


已知 $PA\perp$平面 $ABCD,CD\perp AD,BA\perp AD,CD=AD=AP=4,AB=2$.

(1)求证:$CD\perp$平面 ADP;

(2)若 M 为线段 PC 上的点,当 $BM\perp PC$ 时,求三棱锥 $B\text{-}APM$ 的体积.

4.

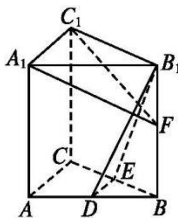


在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$AB=BC=CA=AA_1=2$,侧棱 $AA_1\perp$平面 ABC,D,E 分别是棱 A_1B_1,AA_1 的中点,点 F 在棱 AB 上,且 $AF=AB$.

(1)求证:EF∥平面 BDC_1;

(2)求三棱锥 $D\text{-}BEC_1$ 的体积.

5.

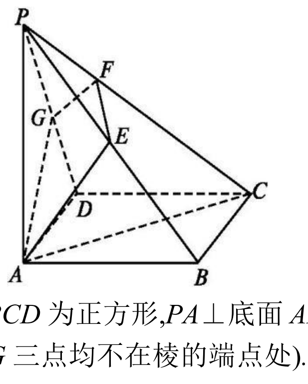


如图,在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,D,E 分别为 AB,BC 的中点,点 F 在侧棱 B_1B 上,且 $B_1D\perp A_1F,A_1C_1\perp A_1B_1$.

求证:(1)直线 $DE\parallel$平面 A_1C_1F;

(2)平面 $B_1DE\perp$平面 A_1C_1F.

6.



如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形,$PA\perp$底面 $ABCD,PA=AC$,过点 A 的平面与棱 PB,PC,PD 分别交于点 E,F,G(E,F,G 三点均不在棱的端点处).

(1)求证:平面 $PAB\perp$平面 PBC.

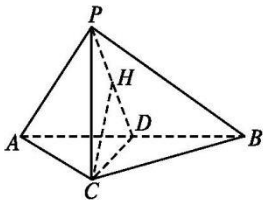
(2)若 $PC\perp$平面 $AEFG$,求的值.

(3)直线 AE 是否可能与平面 PCD 平行?证明你的结论.

##

题型练6　大题专项(四)

立体几何综合问题



1.(1)**证明**　取 AB 的中点 D,连接 PD,CD.

∵$AP=BP$,

∴$PD\perp AB$.

∵$AC=BC$,∴$CD\perp AB$.

∵$PD\cap CD=D$,

∴$AB\perp$平面 PCD.

∵$PC\subset$平面 PCD,∴$PC\perp AB$.

(2)**解**　由(1)知 $AB\perp$平面 PCD,

∴平面 $APB\perp$平面 PCD.

过 C 作 $CH\perp PD$,垂足为 H.

∵平面 $APB\cap$平面 $PCD=PD$,

∴$CH\perp$平面 APB.

∴CH 的长即为点 C 到平面 APB 的距离.

由(1)知 $PC\perp AB$,又 $PC\perp AC$,且 $AB\cap AC=A$,

∴$PC\perp$平面 ABC.∵$CD\subset$平面 ABC,∴$PC\perp CD$.

在 Rt△PCD 中,$CD=AB=$,$PD=PB=$,∴$PC==2$.

$CH=$,

∴点 C 到平面 APB 的距离为.

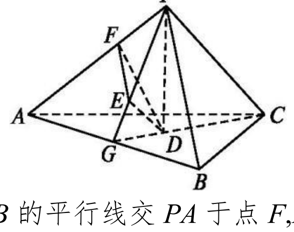
2.(1)**证明**　因为 P 在平面 ABC 内的正投影为 D,

所以 $AB\perp PD$.

因为 D 在平面 PAB 内的正投影为 E,所以 $AB\perp DE$.

所以 $AB\perp$平面 PED,故 $AB\perp PG$.

又由已知可得,$PA=PB$,从而 G 是 AB 的中点.



(2)**解**　在平面 PAB 内,过点 E 作 PB 的平行线交 PA 于点 F,F 即为 E 在平面 PAC 内的正投影.

理由如下:由已知可得 $PB\perp PA$,$PB\perp PC$,

又 $EF /\!/ PB$,所以 $EF\perp PA$,$EF\perp PC$.因此 $EF\perp$平面 PAC,即点 F 为 E 在平面 PAC 内的正投影.

连接 CG,因为 P 在平面 ABC 内的正投影为 D,所以 D 是正三角形 ABC 的中心.

由(1)知,G 是 AB 的中点,所以 D 在 CG 上,

故 $CD=CG$.

由题设可得 $PC\perp$平面 PAB,$DE\perp$平面 PAB,

所以 $DE /\!/ PC$,因此 $PE=PG$,$DE=PC$.

由已知,正三棱锥的侧面是直角三角形且 $PA=6$,可得 $DE=2$,$PE=2$.

在等腰直角三角形 EFP 中,可得 $EF=PF=2$.

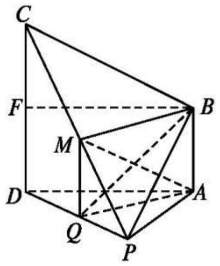
所以四面体 $PDEF$ 的体积 $V=\times2\times2\times2=$.

3.(1)**证明** 因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,$PA\subset$平面 ADP,

所以平面 $ADP\perp$平面 $ABCD$.

因为平面 $ADP\cap$平面 $ABCD=AD$,$CD\perp AD$,

所以 $CD\perp$平面 ADP.

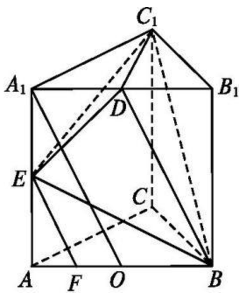


(2)**解** 取 CD 的中点 F,连接 BF,在梯形 $ABCD$ 中,因为 $CD=4$,$AB=2$,所以 $BF\perp CD$.又 $BF=AD=4$,所以 $BC=2$.

在$\triangle ABP$ 中,由勾股定理求得 $BP=2$.

所以 $BC=BP$.又知点 M 在线段 PC 上,且 $BM\perp PC$,所以点 M 为 PC 的中点.

在平面 PCD 中过点 M 作 $MQ /\!/ DC$ 交 DP 于 Q,连接 QB,QA,则 $V_{三棱锥B\text{-}APM}=V_{三棱锥M\text{-}APB}=V_{三棱锥Q\text{-}APB}=V_{三棱锥B\text{-}APQ}=\times2=\times2\times2$.



4.(1)**证明** 设 O 为 AB 的中点,连接 A_1O,

$\because AF=AB$,O 为 AB 的中点,$\therefore F$ 为 AO 的中点.又 E 为 AA_1 的中点,$\therefore EF /\!/ A_1O$.

$\because D$ 为 A_1B_1 的中点,O 为 AB 的中点,

$\therefore A_1D=OB$.

又 $A_1D /\!/ OB$,$\therefore$四边形 A_1DBO 为平行四边形.

$\therefore A_1O /\!/ BD$.

又 $EF /\!/ A_1O$,$\therefore EF /\!/ BD$.

又 $EF\not\subset$平面 DBC_1,$BD\subset$平面 DBC_1,

$\therefore EF /\!/$平面 DBC_1.

(2)**解** $\because AB=BC=CA=AA_1=2$,D,E 分别为 A_1B_1,AA_1 的中点,$AF=AB$,$\therefore C_1D\perp$平面 ABB_1A_1.

而,

$S_{\triangle BDE}$=-$S_{\triangle ABE}$-=2×2-×2×1-×2×1-×1×1=.

∵C_1D=,∴$S_{\triangle BDE}$·C_1D=.

5.证明 (1)在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中,A_1C_1∥AC.

在△ABC 中,因为 D,E 分别为 AB,BC 的中点,

所以 DE∥AC,于是 DE∥A_1C_1.

又因为 $DE\not\subset$平面 A_1C_1F,$A_1C_1\subset$平面 A_1C_1F,

所以直线 DE∥平面 A_1C_1F.

(2)在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中,$A_1A\perp$平面 $A_1B_1C_1$.

因为 $A_1C_1\subset$平面 $A_1B_1C_1$,所以 $A_1A\perp A_1C_1$.

又因为 $A_1C_1\perp A_1B_1$,$A_1A\subset$平面 ABB_1A_1,$A_1B_1\subset$平面 ABB_1A_1,$A_1A\cap A_1B_1=A_1$,

所以 $A_1C_1\perp$平面 ABB_1A_1.

因为 $B_1D\subset$平面 ABB_1A_1,所以 $A_1C_1\perp B_1D$.

又因为 $B_1D\perp A_1F$,$A_1C_1\subset$平面 A_1C_1F,$A_1F\subset$平面 A_1C_1F,$A_1C_1\cap A_1F=A_1$,

所以 $B_1D\perp$平面 A_1C_1F.

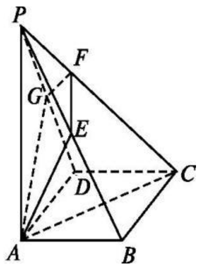
因为直线 $B_1D\subset$平面 B_1DE,所以平面 $B_1DE\perp$平面 A_1C_1F.

6.(1)**证明** 因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp BC$.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形,

所以 $AB\perp BC$,所以 $BC\perp$平面 PAB.

所以平面 $PAB\perp$平面 PBC.



(2)**解** 连接 AF.

因为 $PC\perp$平面 $AEFG$,所以 $PC\perp AF$.

又因为 $PA=AC$,

所以 F 是 PC 的中点.

所以.

(3)**解** AE 与平面 PCD 不可能平行.

证明如下:假设 AE∥平面 PCD,

因为 AB∥CD,$AB\not\subset$平面 PCD,

所以 AB∥平面 PCD.

而 $AE,AB\subset$平面 PAB,所以平面 PAB∥平面 PCD,这显然矛盾.

所以假设不成立,即 AE 与平面 PCD 不可能平行.