

2015—2016 学年度下学期期中阶段测试

高二文科 数学试卷

考试时间：120 分钟 试题满分：150 分

第 I 卷（共 60 分）

一、选择题（本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 复数 $(1+i)(1-i) = (\quad)$

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

2. 若 $f'(x_0) = -4$ ，则 $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2k) - f(x_0)}{k}$ 等于 $(\quad)$

- A. -8 B. -2 C. 8 D. 2

3. 反证法证明某命题，对结论：“自然数 a, b, c 中恰有一个偶数”正确的反设为 $(\quad)$

- A. a, b, c 中至少有两个偶数 B. a, b, c 中至少有两个偶数或都是奇数
C. a, b, c 都是奇数 D. a, b, c 都是偶数

4. 已知函数 $f(x) = x - 2 \ln x$ ，则 $f(x)$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线方程是 $(\quad)$

- A. $x - y + 2 = 0$ B. $x + y + 2 = 0$ C. $x + y - 2 = 0$ D. $x - y - 2 = 0$

5. 下列关于复数的运算中，错误的是 $(\quad)$

- A. $(1+i)^{200} = 2^{100}$ B. $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 是 $x^3 + 1 = 0$ 的根
C. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ D. $(\cos A + i \sin A)^2 = \cos 2A + i \sin 2A$

6. 有 10 个乒乓球，将它们任意分成两堆，求出这两堆乒乓球个数的乘积，再将每堆乒乓球任意分成两堆并求出这两堆乒乓球个数的乘积，如此下去，直到不能再分为止，则所有乘积的和为 $(\quad)$

- A. 45 B. 55 C. 90 D. 100

7. 观察 $(x^2)' = 2x$ ， $(x^4)' = 4x^3$ ， $(\cos x)' = -\sin x$ ，由归纳推理可得：若定义在 R 上的函数

$f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$ ，记 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，则 $g(-x) = (\quad)$

- A. $f(x)$ B. $-f(x)$ C. $g(x)$ D. $-g(x)$

8. 下面几种推理过程是演绎推理的是 $(\quad)$

- A. 两条直线平行，同旁内角互补，如果 $\angle A$ 和 $\angle B$ 是两条平行直线的同旁内角，则 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ；
B. 由平面三角形的性质，推测空间四面体的性质；
C. $f(n) = n^2 + n + 41$ ，经计算可知 $f(1), f(2), f(3) \cdots f(10)$ 都是质数，由此推断 $f(n) (n \in N^+)$ 都是质数；
D. 高二共有 6 个班，人数分别为 45、46、42、44、47、45，由此推测高二各班都不超过 50 人。

9. 若函数 $f(x) = \ln x + 2x^2 - ax$ 存在与直线 $2x - y = 0$ 平行的切线, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -6]$ B. $(-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$ C. $[2, +\infty)$ D. $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$

10. 设点 P 在曲线 $y = e^x$ 上, 点 Q 在曲线 $y = \ln x$ 上, 则 $|PQ|$ 最小值为 ()

A. $\ln 2$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $1 + \sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

11. 在平面几何中, 若正三角形的内切圆面积为 S_1 , 外接圆面积为 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$, 类比上述命题,

在空间中, 若正四面体的内切球体积 V_1 , 外接球体积为 V_2 , 则 $\frac{V_1}{V_2} =$ ()

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{27}$

12. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $2f(x) < xf'(x) < 3f(x)$ 且 $f(x) > 0$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 ()

A. $\frac{1}{16} < \frac{f(1)}{f(2)} < \frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{8} < \frac{f(1)}{f(2)} < \frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4} < \frac{f(1)}{f(2)} < \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3} < \frac{f(1)}{f(2)} < \frac{1}{2}$

第 II 卷 (共 90 分)

二、填空题 (每题 5 分, 满分 20 分, 将答案填在答题纸上)

13. 设 i 为虚数单位, 复数 $z = (a^3 - a) + \frac{a}{(1-a)}i (a \in \mathbb{R})$ 为纯虚数, 则 a 的值为_____.

14. 某种产品的广告费支出 x 与销售额 y 之间有如下对应数据 (单位: 百万元).

x	2	4	5	6	8
y	30	40	60	t	70

根据上表提供的数据, 求出 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 6.5x + 17.5$, 则表中 t 的值为_____.

15. 凸函数的性质定理为: 如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是凸函数, 则对于区间 D 内的任意

$x_1, x_2, \dots, x_n$, 有 $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$, 已知函数 $y = \sin x$ 在区间

$(0, \pi)$ 上是凸函数, 则在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A + \sin B + \sin C$ 的最大值为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \geq 1 \\ \frac{1}{e}(x+2)(x-a) & x < 1 \end{cases}$ (a 为常数, e 为自然对数的底数) 的图象在点 $A(e, 1)$

处的切线与该函数的图象恰好有三个公共点, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

已知复数 $z = 1 + i$ (1) 若 $w = z^2 + 3\bar{z} - 4$, 求 w 的值

(2) 若 $\frac{z^2 + az + b}{z^2 - z + 1} = 1 - i$, 求实数 a, b 的值

18. (本小题满分 12 分)

(I) 如表所示是某市最近 5 年个人年平均收入表节选. 求 y 关于 x 的回归直线方程, 并估计第 6 年此市的个人年平均收入 (保留三位有效数字).

年份 x	1	2	3	4	5
收入 y (千元)	21	24	27	29	31

其中 $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 421$, $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55$ 附 1: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$

(II) 下表是从调查某行业个人平均收入与接受专业培训时间关系得到 2×2 列联表:

	受培时间一年以上	受培时间不足一年	合计
收入不低于平均值	60	20	80
收入低于平均值	10	10	20
合计	70	30	100

请判断是否有 95% 以上的把握认为“收入与接受培训时间有关系”.

附 2:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.40	0.10	0.05	0.01	0.005
k_0	0.455	0.708	2.706	3.841	6.635	7.879

附 3:

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}. \quad (n = a+b+c+d)$$

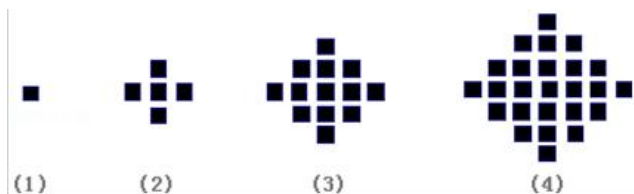
19. (本小题满分 12 分)

(I) 用分析法证明: $2\cos(\alpha - \beta) - \frac{\sin(2\alpha - \beta)}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$

(II) 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 中, a, b, c 均为整数, 且 $f(0), f(1)$ 均为奇数.
求证: $f(x) = 0$ 无整数根.

20. (本小题满分 12 分)

某少数民族的刺绣有着悠久的历史, 图中 (1)、(2)、(3)、(4) 为她们刺绣最简单的四个图案, 这些图案都是由小正方向构成, 小正方形数越多刺绣越漂亮, 向按同样的规律刺绣 (小正方形的摆放规律相同), 设第 n 个图形包含 $f(n)$ 个小正方形



(1) 求 $f(6)$ 的值

(2) 求出 $f(n)$ 的表达式

(3) 求证: $1 \leq \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)-1} + \frac{1}{f(3)-1} + \dots + \frac{1}{f(n)-1} < \frac{3}{2}$

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - x^2 + a, x \in R$ 的图像在点 $x=0$ 处的切线为 $y = bx$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 当 $x \in R$ 时, 求证: $f(x) \geq -x^2 + x$;

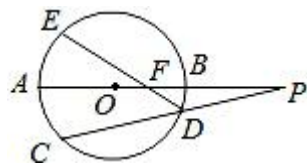
(3) 若 $f(x) > kx$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-1: 几何证明选讲

如图, $\odot O$ 的直径 AB 的延长线与弦 CD 的延长线相交于点 P , E 为 $\odot O$ 上一点, $AE=AC$, DE 交 AB 于点 F , 且 $AB=2BP=4$,

(1) 求 PF 的长度.

(2) 若圆 F 与圆 O 内切, 直线 PT 与圆 F 切于点 T , 求线段 PT 的长度.



23. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知直线 $l: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 曲线 $C_1: \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数})$

(1) 设 l 与 C_1 相交于 A, B 两点, 求 $|AB|$;

(2) 若把曲线 C_1 上各点的横坐标压缩为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标压缩为原来的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍, 得到曲线 C_2 ,

设点 P 是曲线 C_2 上的一个动点, 求它到直线 l 的距离的最小值.

24. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+3| - m, m > 0, f(x-3) \geq 0$ 的解集为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

(1) 求 m 的值

(2) 若 $\exists x \in R$, 使得 $f(x) \geq |2x-1| - t^2 + \frac{3}{2}t + 1$ 成立, 求实数 t 的取值范围.