

浅谈高中数学中的应用型问题

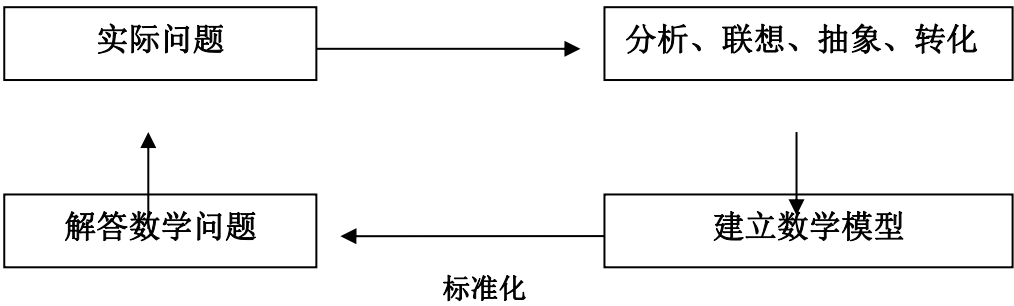
随着素质教育思想的不断深入，试题不断深化能力立意，突出考查能力与素质，应用能力做为能力考查的一个侧面，势必显的重要起来。利用数学知识解决实际问题也是学习数学的核心目的。因而，本文通过归纳、推敲将高中应用问题作了深入的提炼、总结，从而达到有条理地培养学生应用性能力的目的。

纵览高中应用性问题，主要以考察学生的数学知识，方法与能力为主，并考察学生应用数学的意识。应用性问题是将基础，能力与应用这三方面相结合的产物，应用只是其中的一个方面。重在引导中学数学教学走向更加健全的道路。应用性问题还体现了数学的工具性，实用性。从而引导学习者更全面地认识数学，学好数学。

高中试题中的应用题，主要围绕函数知识、方程与不等式知识、数列知识、以及排列组合、概率与概率统计知识编拟试题，这些试题可分为三种：

- 一是教材中以出的应用题或改编题；
- 二是有实际背景，情境新颖的数学问题，如：金融，投资，彩票等；
- 三是与横向学科如物理、化学、生物等有联系的问题。

解数学应用题时：首先要认真审题，深刻理解问题的实际背景，理清蕴含在语义中的数学关系，把应用问题数学化，标准化：然后利用所学数学知识解决它，这其中体现了把实际问题数学化的能力，也就是所谓的数学建模能力，其解题的过程可以用下框加以明示：



解数学应用题的关键是要突破三关：

- (1) 阅读理解关：一般数学应用题的文字阅读量都比较大，要通过阅读审题，找出关键词、句理解其意义；
- (2) 建模关：即建立实际问题的数学模型，将其转化为数学问题；
- (3) 数理关：运用恰当的数学方法去解决已建立的数学模型；

自高考强化了对应用能力的考查以来，应用题开始在高中愈加重要起来，这些试题背景贴近生活实际，对学生阅读理解和数学建模能力具有较高的要求。其设置背景也出现了新的变化，主要开始出现以个人所

得税问题，网络问题，足球比赛的胜负问题，概率问题，冷却塔容积问题等等，尤其是概率统计问题。这些题开始成为近年来高考的“主角戏”。

为了能更好的理解和解决高中应用性问题，如概率统计，简单的线性规划的实际应用，分期付款问题和导数在函数型应用问题中的应用。我们应当关注结合我国的实际情况和当前亟待解决的紧迫问题。如税收，环保，能源，国民生产总值等等来编拟的问题，这类试题既有时代气息，又有数学情景。

1. 函数、不等式应用性型问题

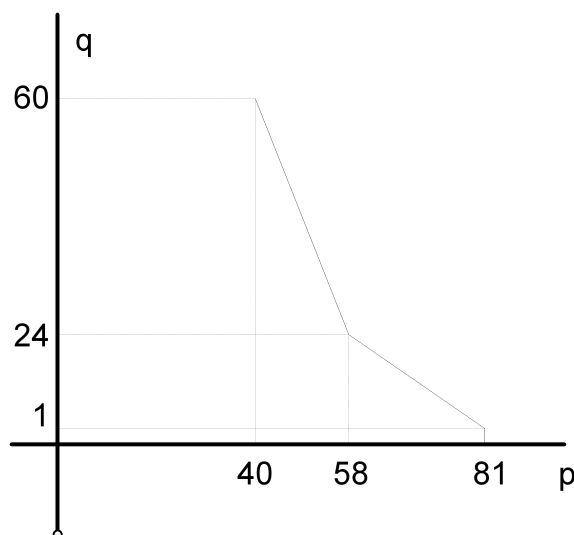
方法规律：解答这类问题，一般都是从建立函数表达式着手，将实际问题数学化，即文字语言向数学的符号语言或图形语言转化，最终在其定义域内给出问题完整准确的解答。这类问题常见有两种：

一是最优化问题。建立函数模型，通过函数性质或不等式研究函数最值，以达到最优。通常涉及的背景有利润最大、路径最短、时间最少、产量最高、用料最省等等；

二是变量控制问题。建立函数模型后，通过不等式达到限制范围的目的，它涉及到社会生活的各个方面。

例．某公司为帮助尚有 26.8 万元无息贷款没有偿还的残疾人商店，借出 20 万元将该商店改建成经营状况良好的某种消费品专卖店，并约定用该店经营的利润逐步偿还债务（所有债务均不计利息）。

已知该种消费品的进价为每件 40 元；该店每月销售量 q （百件）与销售价 p （元 / 件）之间的关系用右图中的一条折线（实线）表示；职工每人每月工资为 600 元，该店应交付的其它费用为每月 13200 元。



（I）若当销售价 p 为 52 元 / 件时，该店正好收支平衡，求该店的职工人数；

（II）若该店只安排 40 名职工，则该店最早可在几年后还清所有债务，此时每件消费品的价格定为多少元？

分析： 本题题目的篇幅较长，所给条件零散杂乱，为此，不仅需要划分段落层次，弄清每一层次独立的含义和相互间的关系，更需要抓住矛盾的主要方面。由题目的问题找到关键词——“收支平衡”、“还清所有债务”，不难想到，均与“利润”相关。

从阅读和以上分析，可以达成我们对题目的整体理解，明确这是一道函数型应用题。为此，首先应该建立利润与职工人数、月销售量 q 、单位商品的销售价 p 之间的关系，然后，通过研究解析式，来对问题作出解答。

由于销售量和各种支出均以月为单位计量，所以，先考虑月利润.

(I) 设该店的月利润为 S 元，有职工 m 名. 则

$$S = q(p - 40) \times 100 - 600m - 13200.$$

$$\text{又由图可知: } q = \begin{cases} -2p + 140, & (40 \leq p \leq 58) \\ -p + 82 & (58 < p \leq 81) \end{cases}.$$

$$\text{所以, } S = \begin{cases} (-2p + 140)(p - 40) \times 100 - 600m - 13200 & (40 \leq p \leq 58) \\ (-p + 82)(p - 40) \times 100 - 600m - 13200 & (58 < p \leq 81) \end{cases}$$

由已知，当 $p = 52$ 时， $S = 0$ ，即

$$(-2p + 140)(p - 40) \times 100 - 600m - 13200 = 0,$$

解得 $m = 50$. 即此时该店有 50 名职工.

(II) 若该店只安排 40 名职工，则月利润

$$S = \begin{cases} (-2p + 140)(p - 40) \times 100 - 37200 & (40 \leq p \leq 58) \\ (-p + 82)(p - 40) \times 100 - 37200 & (58 < p \leq 81) \end{cases}.$$

当 $40 \leq p \leq 58$ 时，求得 $p = 55$ 时， S 取最大值 7800 元.

当 $58 < p \leq 81$ 时，求得 $p = 61$ 时， S 取最大值 6900 元.

综上，当 $p = 55$ 时， S 有最大值 7800 元.

设该店最早可在 n 年后还清债务，依题意，有

$$12n \times 7800 - 268000 - 200000 \geq 0.$$

解得 $n \geq 5$.

所以，该店最早可在 5 年后还清债务，此时消费品的单价定为 55 元.

点评： 实际问题关键在于建立数学模型和目标函数。把“问题情景”译为数学语言，找出问题的主要关系，并把问题的主要关系近似化、形式化，抽象成数学问题，在化归为常见问题，选择合适的数学方法求解。本体难点是如何把实际问题中涉及的几个变量转化成函数关系式。

2. 数列应用型问题

方法规律： 此类应用题经常涉及与增长率有关的实际问题，需要运用等差数列、等比数列知识和递推方法，有时还需根据条件建立方程和不等式才能解决。

例. 某地现有耕地 10000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现有增加 22%，人均粮食产量比现在提高 10%，如果人口年增长率为 1%，那么耕地每年至多只能减少多少公顷（精确到 1 公顷）？

$$\left(\text{粮食单产} = \frac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}} ; \quad \text{人均粮食产量} = \frac{\text{总产量}}{\text{总人口数}} \right)$$

分析：此题以关系国计民生的耕地、人口、粮食为背景，给出两组数据，要求考生从两条线索抽象数列模型，然后进行比较与决策.

解：1. 读题：问题涉及耕地面积、粮食单产、人均粮食占有量、总人口数及三个百分率，其中人均粮食占有量 $P = \frac{\text{粮食单产} \times \text{耕地面积}}{\text{总人口数}}$ ，主要关系是： $P_{\text{实际}} \geq P_{\text{规划}}$.

2. 建模：设耕地面积平均每年至多减少 x 公顷，现在粮食单产为 a 吨 / 公顷，现在人口数为 m ，则现在占有量为 $\frac{a \times 10^4}{m}$ ，10 年后粮食单产为 $a(1+0.22)$ ，人口数为 $m(1+0.01)^{10}$ ，耕地面积为 $(10^4 - 10x)$.

$$\therefore \frac{a(1+0.22)(10^4 - 10x)}{m(1+0.01)^{10}} \geq \frac{a \times 10^4}{m} (1+0.1)$$

$$\text{即 } 1.22(10^4 - 10x) \geq 1.1 \times 10^4 \times (1+0.01)^{10}$$

$$3. \text{ 求解: } x \leq 10^3 - \frac{1.1}{1.22} \times 10^3 \times (1+0.01)^{10}$$

$$\because (1+0.01)^{10} = 1 + C_{10}^1 \times 0.01 + C_{10}^2 \times 0.01^2 + C_{10}^3 \times 0.01^3 + \dots \approx 1.1046$$

$$\therefore x \leq 10^3 - 995.9 \approx 4 \text{ (公顷)}$$

4. 评价：答案 $x \leq 4$ 公顷符合控制耕地减少的国情，又验算无误，故可作答.

另解：1. 读题：粮食总产量 = 单产 $\times$ 耕地面积； 粮食总占有量 = 人均占有量 $\times$ 总人口数；
而主要关系是：粮食总产量 $\geq$ 粮食总占有量

2. 建模：设耕地面积平均每年至多减少 x 公顷，现在粮食单产为 a 吨 / 公顷，现在人口数为 m ，则现在占有量为 $\frac{a \times 10^4}{m}$ ，10 年后粮食单产为 $a(1+0.22)$ ，人口数为 $m(1+0.01)^{10}$ ，耕地面积为 $(10^4 - 10x)$.

$$\therefore a(1+0.22) \times (10^4 - 10x) \geq \frac{a \times 10^4}{m} \times (1+0.1) \times m(1+0.01)^{10}$$

$$3. \text{ 求解: } x \leq 10^3 - \frac{1.1}{1.22} \times 10^3 \times (1+0.01)^{10}$$

$$\because (1+0.01)^{10} = 1 + C_{10}^1 \times 0.01 + C_{10}^2 \times 0.01^2 + C_{10}^3 \times 0.01^3 + \dots \approx 1.1046$$

$$\therefore x \leq 10^3 - 995.9 \approx 4 \text{ (公顷)}$$

4. 评价：答案 $x \leq 4$ 公顷符合控制耕地减少的国情，又验算无误，故可作答。

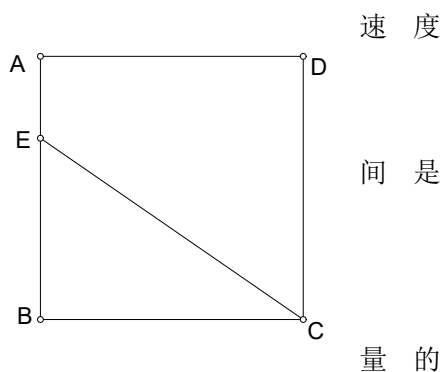
点评：本题主要是抓住各量之间的关系，注重 3 个百分率. 其中耕地面积为等差数列，总人口数为等比数列模型，问题用不等式模型求解. 本题两种解法，虽都是建立不等式模型，但建立时所用的意义不同，这要求灵活掌握，还要求对指数函数、不等式、增长率、二项式定理应用于近似计算等知识熟练. 此种解法可以解决有关统筹安排、最佳决策、最优化等问题. 此种题型属于不等式模型，也可以把它作为数列模型，相比之下，主要求解过程是建立不等式模型后解出不等式.

在解答应用问题时，我们强调“评价”这一步不可少！它是解题者的自我调节，比如本题求解过程中若令 $1.01^{10} \approx 1$ ，算得结果为 $x \leq 98$ 公顷，自然会问：耕地减少这么多，符合国家保持耕地的政策吗？于是进行调控，检查发现是错在 1.01^{10} 的近似计算上.

3. 三角函数应用型问题

方法规律：与三角形有关的应用题，一般涉及解三角形问题，或是涉及物理学科重的物理量，如摆动、振动、电流、电流强度等，对于解三角形问题，经常要用到正弦定理和余弦定理，而与物理量有关的问题，往往要转化为三角函数性质，三角函数最值，三角函数的恒等变形等。

例.一位救生员站在边长为 100 米的正方形游泳池 ABCD 的 A 处(如图),发现 C 处有一位溺水者.他跑到 E 处后,马上跳水沿直线 EC 游到 C 处,已知救生员跑步的速度为 v / 分,游泳的速度为 $\frac{v}{2}$ 米 / 分. 试问,救生员选择在何处入水才能最快到达 C 处,所用的最短时间是多少?



分析：理解本题并不难：应该建立时间 t (分) 关于某个变函数关系式，然后，通过求最值的方法来解决.

难点在于变量的选择，当然，我们可以选择以 AE 的长度 x (米) 作为变量，但此时

$$t = \frac{x}{v} + \frac{2\sqrt{100^2 + (100-x)^2}}{v}, \text{ 求最值较为困难.}$$

注意到：AE 和 EC 的长度，可以方便的用角表示，不必用到根号，所以我们可以尝试以 $\angle CEB$ 作为变量.

$$\text{设 } \angle CEB = \alpha, \text{ 则 } AE = 100 - 100 \cot \alpha, CE = \frac{100}{\sin \alpha}, \text{ 所以,}$$

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{100 - 100 \cot \alpha}{v} + \frac{200}{v \cdot \sin \alpha} = \frac{100}{v} \left(1 + \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \\
 &= \frac{100}{v} \left(1 + \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{2 - \frac{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{2}} \right) = \frac{100}{v} \left(1 + \frac{1 + 3 \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{100}{v} + \frac{50}{v} \left(\frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} + 3 \tan \frac{\alpha}{2} \right) \\
 &\geq \frac{100}{v} + \frac{50}{v} \times 2\sqrt{3} = \frac{100 + 100\sqrt{3}}{v}
 \end{aligned}$$

等号当且仅当 $\frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = 3 \tan \frac{\alpha}{2}$, 即 $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时成立.

此时, $AE = 100 - \frac{100\sqrt{3}}{3}$, $t = \frac{100 + 100\sqrt{3}}{v}$. 也即, 救生员应该在 AB 边上距 B $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ 米处入

水, 才能最快到达 C 处, 所用的最短时间为 $t = \frac{100 + 100\sqrt{3}}{v}$.

点评: (1) 恰当选择变量, 有助于简化数学过程;

(2) 本题中, 若以 $AE = x$ 为自变量, 也可通过三角代换 (或移项、平方、判别式等) 来求得最值.

4. 立体几何应用型问题

方法规律: 解答立体几何应用题, 先要在阅读背景材料理解材料的基础上, 把所给的实际问题抽象成数学问题, 利用所学的数学知识建立适当的立体模型, 再对立体模型进行分析研究, 从而得出数学结论, 最后把所的结论运用到实际问题中去。

例: 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, P, Q 分别是线段 AD_1 和 BD 上的点, 且 $D_1P:PA=DQ:QB=5:12$.

(1) 求证 $PQ \parallel$ 平面 CDD_1C_1 ;

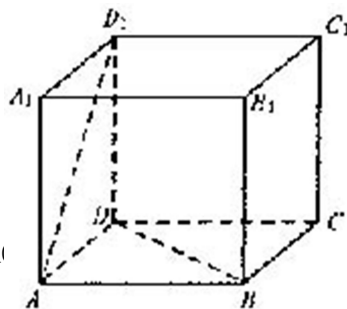
(2) 求证 $PQ \perp AD$;

(3) 求线段 PQ 的长.

解:

(1) 在平面 AD_1 内, 作 $PP_1 \parallel AD$ 与 DD_1 交于点 P_1 , 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内, 作 $QQ_1 \parallel BC$ 交 CD 于点 Q_1 , 连结 P_1Q_1 .

$$\because \frac{D_1P}{PA} = \frac{DQ}{QB} = \frac{5}{12}, \quad \therefore PP_1 \parallel QQ_1.$$



由四边形 PQ_1P_1 为平行四边形, 知 $PQ \parallel P_1Q_1$

而 $P_1Q_1 \subset$ 平面 CDD_1C_1 , 所以 $PQ \parallel$ 平面 CDD_1C_1

(2) $\because AD \perp$ 平面 D_1DCC_1 , $\therefore AD \perp P_1Q_1$,

又 $\because PQ \parallel P_1Q_1$, $\therefore AD \perp PQ$.

(3) 由 (1) 知 $P_1Q_1 \parallel PQ$,

$$\frac{DQ_1}{Q_1C} = \frac{DQ}{QB} = \frac{5}{12}, \text{ 而棱长 } CD=1. \quad \therefore DQ_1 = \frac{5}{17}. \quad \text{同理可求得 } P_1D = \frac{12}{17}.$$

在 $Rt\triangle P_1DQ_1$ 中, 应用勾股定理, 立得

$$P_1Q_1 = \sqrt{P_1D^2 + DQ_1^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{17}\right)^2 + \left(\frac{5}{17}\right)^2} = \frac{13}{17}.$$

做为本题的深化, 如果: P, Q 分别是 BD, AD_1 上的动点, 试求 $|PQ|$ 的最小值, 你能够应用函数方法计算吗?

点评: 立体几何是有效训练空间想象能力的数学工具和模型。通过对平面图形进行立体化抽象, 再利用所学知识, 从而达到解决实际问题的目的。

5. 线性规划应用型问题

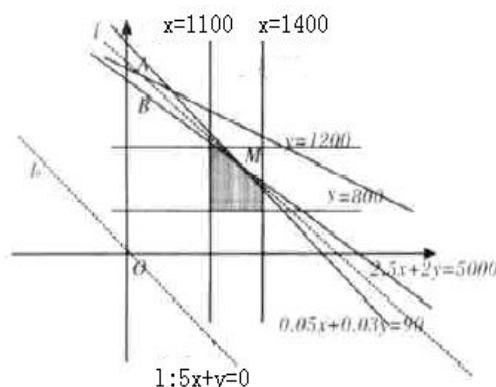
方法规律: 解答线性规划应用题, 首先要正确理解题意, 恰当的进行数学化设计, 合理的给出决策变量, 找出所有的约束条件, 建立显性目标函数和用数形结合的思想, 在线性约束条件下, 寻找决策变量, 使线性目标函数达到最大值或最小值。

例. 有小组在假期中走访了西青区花卉种植人李大民, 并向他了解了相关数据, 目的是为了帮助他获取最大利润。调查结果如下: 鲜花店向李大民预定两种花卉——百合、玫瑰。其中每株收购价百合为4元, 玫瑰为3元, 鲜花店需要百合在1100~1400株之间, 玫瑰在800~1200株之间, 李大民只有资金5000元, 要去购买良种花苗, 在自家90 m^2 的温室中培育, 每株苗价百合为2.5元, 玫瑰为2元, 由于百合与玫瑰生长所需采光条件的不同, 百合每株大约占地0.05 m^2 , 玫瑰每株大约占地0.03 m^2 , 应如何配置才能使李大民获利最大?

解: 数学建模: 设种百合 x 株, 玫瑰 y 株, 则

$$\begin{cases} 2.5x + 2y \leq 5000 \\ 0.05x + 0.03y \leq 90 \\ 1100 \leq x \leq 1400 \\ 800 \leq y \leq 1200 \end{cases}$$

目标函数(即获利) $z = (4 - 2.5)x + (3 - 2)y = 1.5x + y$.



通过作图可知,当直线 l 过M点时,即 $x = 1200$, $y = 1000$ 时, z 取得最大值 $Z_{\max} = 1.5 \times 1200 + 1000 = 2800$ (元)。所以,种百合1200株,玫瑰1000株时,李大民获利最大。

讨论验证:在不考虑种植物所用劳力差异和其他经济投入的情况下,与实际完全符合(已回访了李大民)。

点评: 种植经济作物是农民致富的有效途径,但根据市场需求和个人资源情况,合理安排是非常关键的问题,该组同学从实际出发,为花卉养殖户李大民研究规划了一条有效的致富方案。

6. 排列、组合、概率型应用型问题

方法规律: 排列组合应用题常以选择填空出现,但概率统计问题一般出现在解答题中,从教材改革和今后的发展趋势来看,概率题势必会加大力度,内容会涉及到古典概率、互斥事件有一个发生的概率、相互独立事件同时发生的概率、统计方法、离散型随机变量的期望与方差等等。主要题型有:

(1) 排列问题与组合问题相结合:这类问题一般是先选后排,另外要注意相邻问题的“捆绑法”与不相邻问题的“插空法”;先特殊后一般的解题思路是值得注意的。

(2) 概率问题:弄清事件的关系是互斥还是相互独立,是解决问题的关键; N 次独立重复实验是重要内容之一。另外特殊的概率分布如二项分布、几何分布要熟练掌握。

(3) 风险决策问题:这类题目往往研究随机变量的期望与方差。

例: 由射手对飞机进行4次独立射击,每次射击命中的概率为0.3,一次命中飞机被击落的概率为0.6,至少两次命中时飞机必被击落,求飞机被击落的概率。

分析: 由于飞机是否被击落是与飞机被命中几次由关联的,因此,这个问题首先是一个利用全概率公式计算概率的问题,而飞机被命中几次又是一个贝努里概型的问题,故本题是一个全概率公式与贝努里公式地综合应用题。

解: 设 $A = \{\text{飞机被击落}\}$;

$$B_i = \{\text{飞机被命中 } i \text{ 次}\}, i = 0, 1, 2, 3, 4$$

显然, B_i 的概率可由4重贝努里概型问题来计算,即

$$P(B_i) = C_4^i (0.3)^i 0.7^{4-i}, i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

又由题设知

$$P(\bar{A} | B_0) = 1, P(\bar{A} | B_1) = 1 - P(A | B_1) = 1 - 0.6 = 0.4,$$

$$P(\bar{A} | B_i) = 0, i = 2, 3, 4.$$

因此由全概率公式可得

$$\begin{aligned}
 P(\bar{A}) &= \sum_{i=0}^4 P(B_i)P(\bar{A}|B_i) \\
 &= P(B_0)P(\bar{A}|B_0) + P(B_1)P(\bar{A}|B_1) \\
 &= 0.7^4 \times 1 + C_4^1 \times 0.3 \times 0.7 \times 0.4 \approx 0.405,
 \end{aligned}$$

故 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.95$.

点评：

- (1) 要分清楚对立事件和相互独立事件的关系，独立事件和互斥事件的区别；
- (2) 在教学中必须强调随机变量的概念，分布列的定义和求法，熟练常用的分布列：0-1分布列，二项分布，数学期望和方差的计算等。

高中应用性问题是今后大型的数学建模的引导。能够有条理，针对性的对各基础问题做到深刻的理解，是解决应用性问题的关键，应用性问题的引入使数学更加贴近生活，贴切实际，使数学思想得以广泛的应用。使高度抽象的理论具体化。高中应用性问题囊括了高中的各大数学思想，如函数方程的思想，划归的思想，数形结合的思想，分类讨论的思想等等。因而应用性问题是有效掌握知识的载体。很好的解决应用性问题，能够培养学生的严谨思维能力和数学素养。

参考文献

1. 中华人民共和国教育部：普通高中数学课程标准（实验） 北京：人民教育出版社 2003
2. 梅彩霞. 浙江宁海桑洲中学数学解题中的启发式教学 [N]. 现代教育报. 精品博览. 2007 年
3. 孙泽瀛 《中学数学教师如何对学生进行启发》数学教学[J] 2005 年第 7 期
4. 《数学课程标准》 北京师范大学出版社
5. 朱德全, 宋乃庆. 谈数学教学中的问题解决与元认识开发. 学科教育, 1997(6): 32—34;