

对过一点作直线与双曲线只有一个交点的直线有几条的初探

题目：双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，点 A 为双曲线所在平面内一点，则 A 有几个位置。

1. A 为双曲线内部点，设 $A(x_0, y_0)$ 则 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} > 1 (a > 0, b > 0)$

设过 $A(x_0, y_0)$ 的直线 $l: y - y_0 = k(x - x_0)$ 代入双曲线方程得：

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2k(y_0 - kx_0)x - a^2(y_0 - kx_0)^2 - a^2b^2 = 0$$

若 $b^2 - a^2k^2 = 0$ 则 $k = \pm \frac{b}{a}$ ，可知有一个交点的直线有两条。

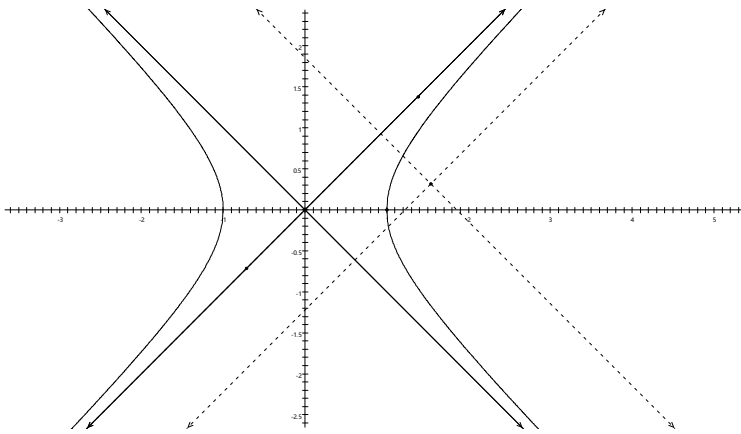
若 $b^2 - a^2k^2 \neq 0$ 则

$$\begin{aligned} \Delta &= 4a^4k^2(y_0 - kx_0)^2 - 4(a^2k^2 - b^2)[a^2(y_0 - kx_0)^2 + a^2b^2] \\ &= 4a^2\{a^2k^2(y_0 - kx_0)^2 - (a^2k^2 - b^2)[(y_0 - kx_0)^2 + b^2]\} \\ &= 4a^2\{a^2k^2(y_0 - kx_0)^2 - [a^2k^2(y_0 - kx_0)^2 + a^2b^2k^2 - b^2(y_0 - kx_0)^2 - b^4]\} \\ &= 4a^2[b^2(y_0 - kx_0)^2 + b^4 - a^2b^2k^2] \\ &= 4a^2b^2[(y_0 - kx_0)^2 + b^2 - a^2k^2] \\ &= 4a^2b^2(y_0^2 - 2kx_0y_0 + k^2x_0^2 + b^2 - a^2k^2) \\ &= 4a^2b^2[(x_0^2 - a^2)k^2 - 2x_0y_0k + b^2 + y_0^2] \\ \Delta_1 &= 4x_0^2y_0^2 - 4(x_0^2 - a^2)(b^2 + y_0^2) \\ &= 4x_0^2y_0^2 - 4(x_0^2y_0^2 + b^2x_0^2 - a^2b^2 - a^2y_0^2) \\ &= 4(a^2b^2 + a^2y_0^2 - b^2x_0^2) \\ &= \frac{4}{a^2b^2}(1 + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2}) \end{aligned}$$

$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} > 1 (a > 0, b > 0)$ 且 $x_0^2 - a^2 > 0 \therefore \Delta_1 < 0 \therefore \Delta > 0$ 不满足条件。

结论：当点 A 在双曲线内部时，过 A 作直线与双曲线有一个交点的直线有且只有两条。

如图：



2. A 在双曲线上时，即 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$

设 过 $A(x_0, y_0)$ 的 直 线 $l: y - y_0 = k(x - x_0)$ 代 入 双 曲 线 方 程 得 :

$$(b^2 - a^2 k^2)x^2 - 2a^2 k(y_0 - kx_0)x - a^2(y_0 - kx_0)^2 - a^2 b^2 = 0$$

若 $b^2 - a^2 k^2 = 0$ 则 $k = \pm \frac{b}{a}$ ，可知有一个交点的直线有两条。

若 $b^2 - a^2 k^2 \neq 0$ 则

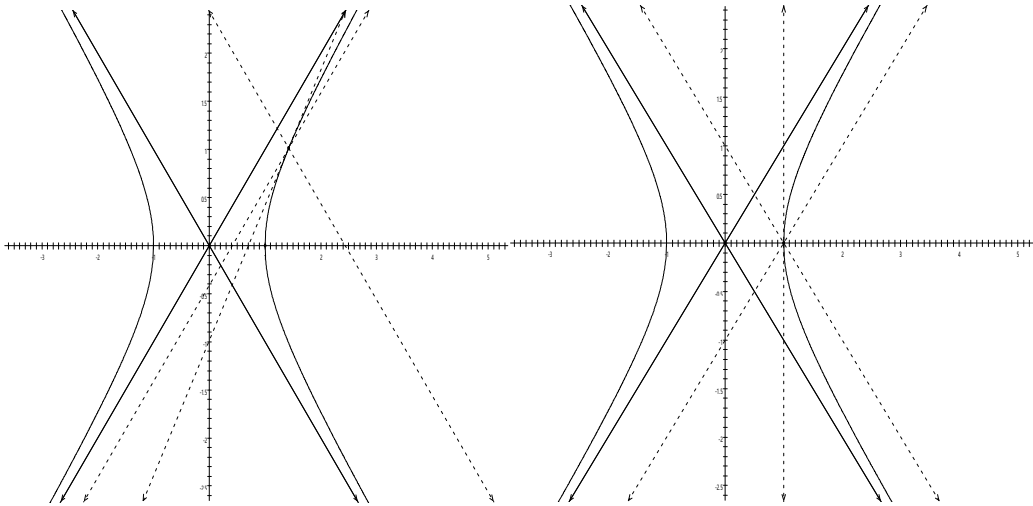
$$\begin{aligned} \Delta &= 4a^2 b^2 [(x_0^2 - a^2)k^2 - 2x_0 y_0 k + b^2 + y_0^2] \\ &= 4a^2 b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} y_0^2 - 2x_0 y_0 k + \frac{b^2}{a^2} x_0^2 \right) \\ &= 4a^2 b^2 \left(\frac{a}{b} y_0 k - \frac{b}{a} x_0 \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

则 $\frac{a}{b} y_0 k = \frac{b}{a} x_0 \therefore k = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (y_0 \neq 0)$ 有一条。

当 $A(\pm a, 0)$ 时，仍然成立。

结论：当点 A 在双曲线上时，过 A 作直线与双曲线有一个交点的直线有且只有三条。

如图：



3. A 在双曲线外部，但不在渐近线上。即 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 1 (a > 0, b > 0)$ 但 $y_0 \neq \pm \frac{b}{a}x_0$

(1) $A(x_0, y_0), x_0 \neq \pm a$

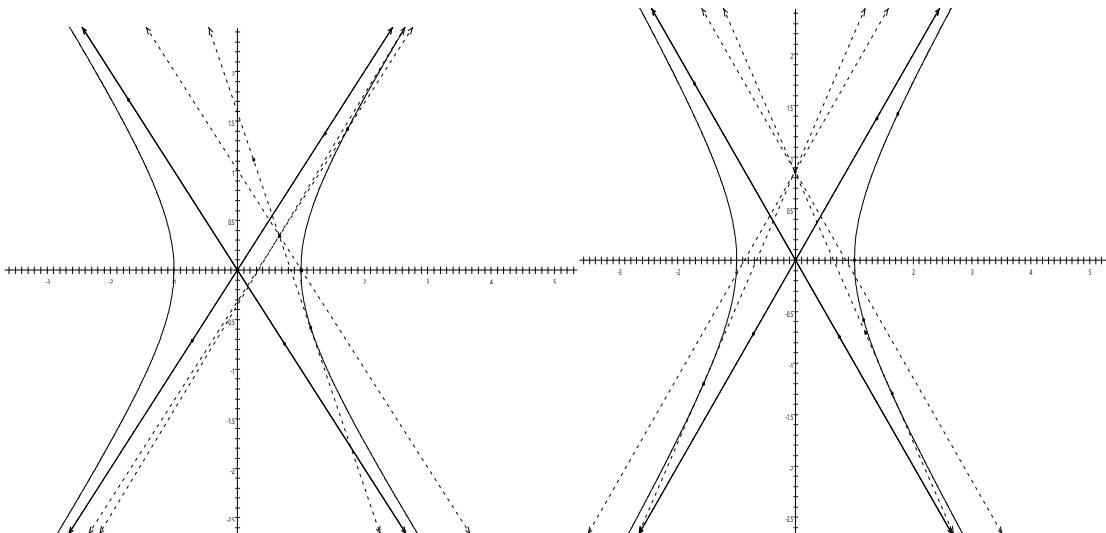
若 $b^2 - a^2k^2 = 0$ 则 $k = \pm \frac{b}{a}$ ，可知有一个交点的直线有两条。

若 $b^2 - a^2k^2 \neq 0$ 则 $\Delta = 4a^2b^2[(x_0^2 - a^2)k^2 - 2x_0y_0k + b^2 + y_0^2]$

$$\Delta_1 = \frac{4}{a^2b^2} \left(1 + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} \right) > 0 \therefore \Delta = 0 \text{ 有二解。}$$

(2) $A(x_0, y_0), x_0 = \pm a$ 时，仍然正确。

结论：当点 A 在双曲线外部，但不在渐近线上。过 A 作直线与双曲线有一个交点的直线有且只有四条。
如图：



4. A 在双曲线渐近线上，但不在原点上。即如 $y_0 = \frac{b}{a}x_0 (x_0 \neq 0)$ 。

(1) $A(x_0, y_0), x_0 \neq \pm a$

若 $b^2 - a^2k^2 = 0$ 则 $k = \pm \frac{b}{a}$, 可知有一个交点的直线有一条。

若 $b^2 - a^2k^2 \neq 0$ 则

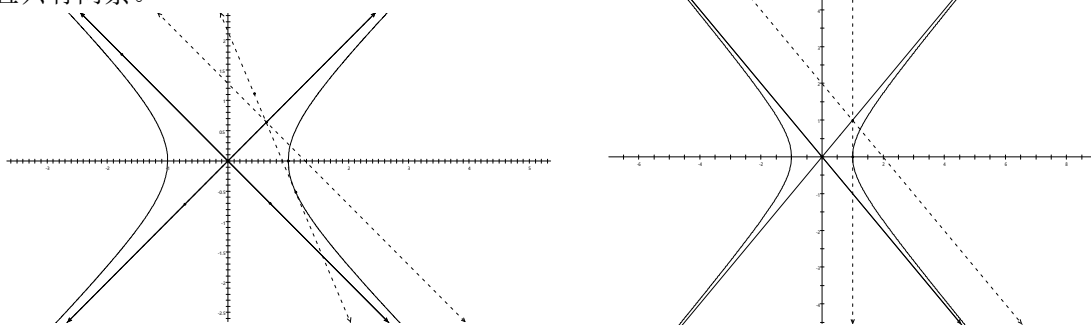
$$\begin{aligned}\Delta &= 4a^2b^2[(y_0 - kx_0)^2 + b^2 - a^2k^2] \\ &= 4a^2b^2[(\frac{b}{a}x_0 - kx_0)^2 + b^2 - a^2k^2] \\ &= 4a^2b^2[x_0^2(\frac{b-ak}{a})^2 + (b-ak)(b+ak)] \\ &= 4a^2b^2(b-ak)[(\frac{a^2-x_0^2}{a})k + \frac{b(x_0^2+a^2)}{a^2}] = 0\end{aligned}$$

则 $k = \frac{b(x_0^2+a^2)}{a(x_0^2-a^2)}$ 存在一条直线

(2) $A(x_0, y_0), x_0 = \pm a$ 时, 仍然正确

结论: A 在双曲线渐近线上, 但不在原点上。即如 $y_0 = \frac{b}{a}x_0 (x_0 \neq 0)$, 过 A 作直线与双曲线有一个交点的直线有且只有两条。

如图:



5. A 在原点上时, 即 $A(0,0)$ 设过 A 的直线为 $y = kx$

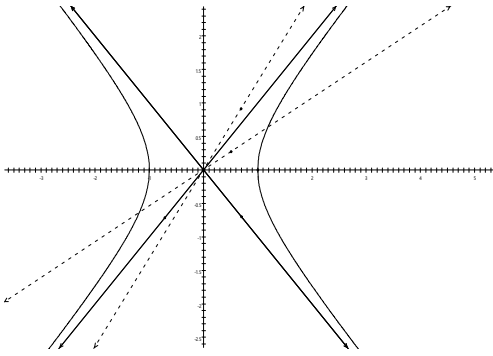
$$(b^2 - a^2k^2)x^2 = a^2b^2$$

若 $b^2 - a^2k^2 > 0$ 有两解, 不满足条件。

若 $b^2 - a^2k^2 < 0$ 无解, 不满足条件。

结论: A 在原点上时, 即 $A(0,0)$, 过 A 作直线与双曲线有一个交点的直线有且只有 0 条。

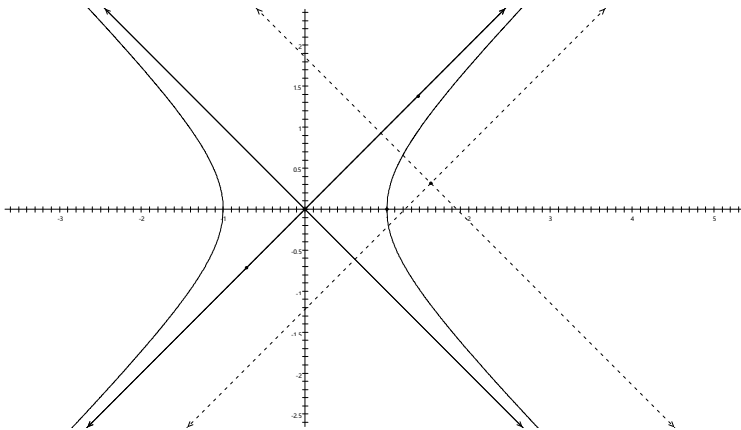
如图:



综上有：

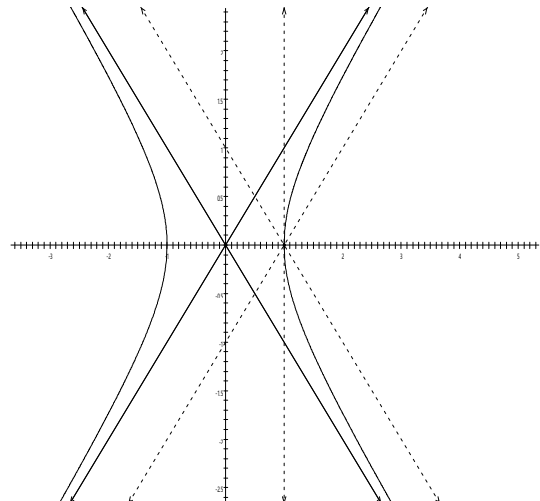
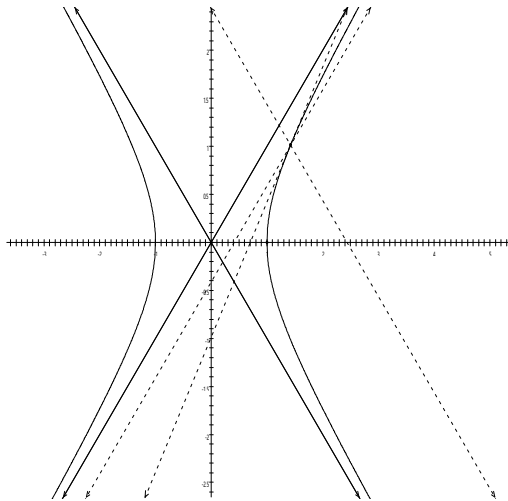
(1)当点 A 在双曲线内部时，过 A 作直线与双曲线有一个交点的直线有且只有两条。

如图：



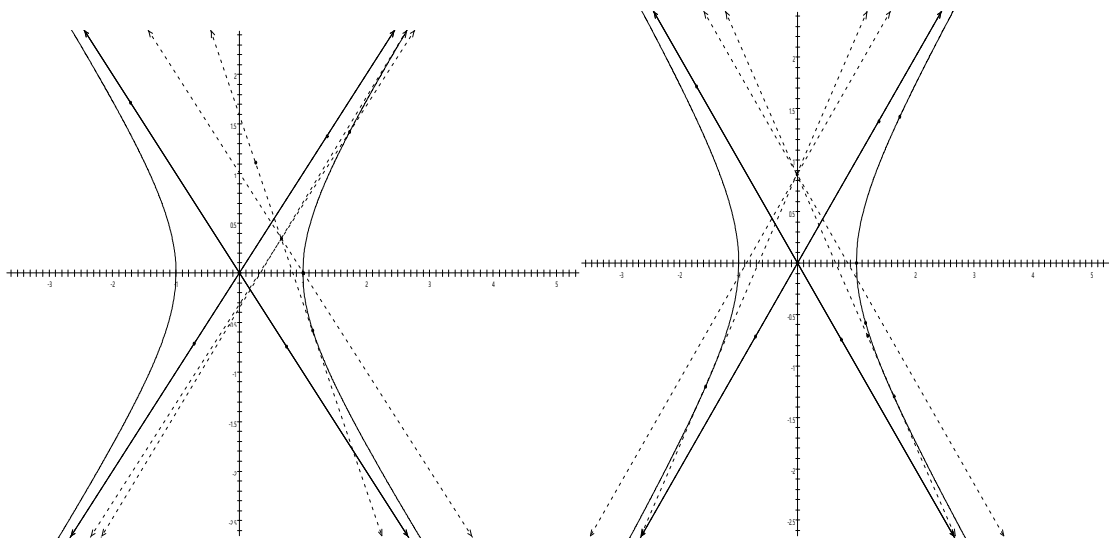
(2)当点 A 在双曲线上时，过 A 作直线与双曲线有一个交点的直线有且只有三条。

如图：



(3)当点 A 在双曲线外部，但不在渐近线上。过 A 作直线与双曲线有一个交点的直线有且只有四条。

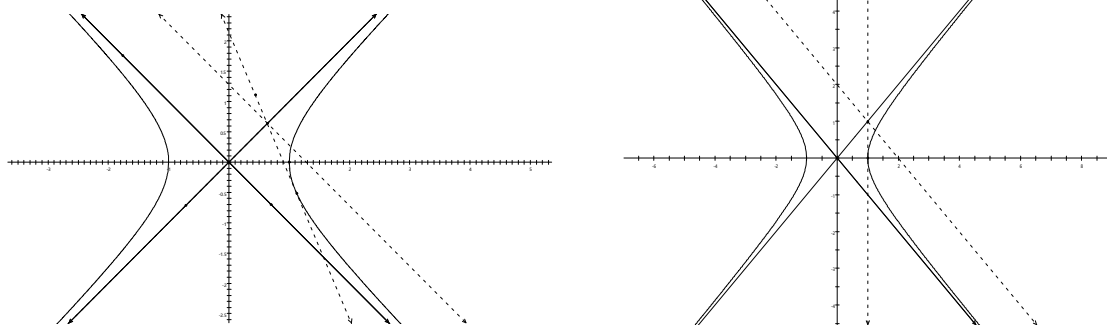
如图：



(4) A 在双曲线渐近线上，但不在原点上。即如 $y_0 = \frac{b}{a}x_0 (x_0 \neq 0)$ ，过 A 作直线与双曲线有一个交点的直线

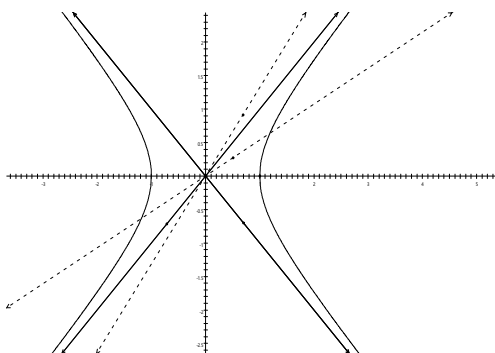
有 且
两条。
如图：

只有



(5) A 在原点上时，即 $A(0,0)$ ，过 A 作直线与双曲线有一个交点的直线有且只有 0 条。

如图：



因此，我们对于问题要研究透彻。才能够完完全全的理解问题的实质。