

2016-2017 学年高三（上）12 月月考数学试卷

一、填空题（前 6 题每小题 6 分，后 6 题每小题 6 分，共 54 分）

1. 计算： $\frac{1+i^{2017}}{1-i}$ = ____（i 是虚数单位）

2. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线的夹角为 ____.

3. 在二项式 $(x + \frac{2}{x})^6$ 的展开式中，常数项等于 ____.

4. 设全集 $U = \mathbb{R}$ ，已知 $A = \{x \mid \frac{2x+3}{x-2} > 0\}$ ， $B = \{x \mid |x-1| < 2\}$ ，则 $A \cap B =$ ____.

5. 函数 $f(x) = \frac{(x+3)^0}{\sqrt{|x|}-x}$ 的定义域是 ____.

6. 幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{-m}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时为减函数，则 m 的值为 ____.

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 2$ ， $a_3 = 1$ ，则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n+1}) =$ ____.

8. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x + 2y$ 的最大值为 ____.

9. 点 P 是棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上一点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC_1}$ 的取值范围是 ____.

10. 已知关于 x 的不等式 $(4kx - k^2 - 12k - 9)(2x - 11) > 0$ ，其中 $k \in \mathbb{R}$ ，对于不等式的解集 A ，记 $B = A \cap \mathbb{Z}$ （其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集），若集合 B 是有限集，则使得集合 B 中元素个数最少时的实数 k 的取值范围是 ____.

11. 设三角形 ABC 的内角 A, B, C 所对的边长分别是 a, b, c ，且 $B = \frac{\pi}{3}$ ，若 $\triangle ABC$ 不是钝角三角形，则 $\frac{2a}{c}$ 的取值范围是 ____.

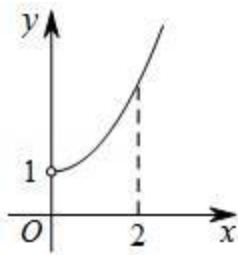
12. 数列 $\{2^n - 1\}$ 的前 n 项 $1, 3, 7, \dots, 2^n - 1$ 组成集合 $A_n = \{1, 3, 7, 2^n - 1\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，从集合 A_n 中任取 k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) 个数，其所有可能的 k 个数的乘积的和为 T_k （若只取一个数，规定乘积为此数本身），记 $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ ，例如当 $n = 1$ 时， $A_1 = \{1\}$ ， $T_1 = 1$ ， $S_1 = 1$ ；当 $n = 2$ 时， $A_2 = \{1, 3\}$ ， $T_1 = 1 + 3$ ， $T_2 = 1 \times 3$ ， $S_2 = 1 + 3 + 1 \times 3 = 7$ ，试写出 $S_n =$ ____.

二、选择题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 如果 $a < b < 0$ ，那么下列不等式成立的是（ ）

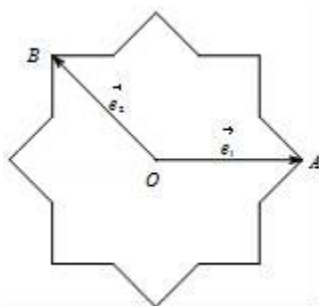
- A. $a^2 < ab$ B. $-ab < -b^2$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$

14. 已知函数 $y=f(x)$ ， $x \in \mathbb{R}$ 是奇函数，其部分图象如图所示，则在 $(-1, 0)$ 上与函数 $f(x)$ 的单调性相同的是（ ）



- A. $y=x+\frac{1}{x}$ B. $y=\log_2|x|$
C. $y=\begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ e^{-x} & x < 0 \end{cases}$ D. $y=\cos(2x)$

15. 将一个圆的八个等分点分成相间的两组，连接每组的四个点得到两个正方形. 去掉两个正方形内部的八条线段后可以形成一正八角星，如图所示. 设正八角星的中心为 O ，并且 $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_2$ ，若将点 O 到正八角星 16 个顶点的向量，都写成为 $\lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ ， $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 的形式，则 $\lambda + \mu$ 的最大值为（ ）



- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $1+\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

16. 直线 $l: ax + \frac{1}{a}y - 1 = 0$ 与 x, y 轴的交点分别为 A, B ，直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的交点为 C, D ，给出下面三个结论：

- ① $\forall a \geq 1, S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}$; ② $\exists a \geq 1, |AB| < |CD|$; ③ $\exists a \geq 1, S_{\triangle COD} < \frac{1}{2}$.

其中，所有正确结论的序号是（ ）

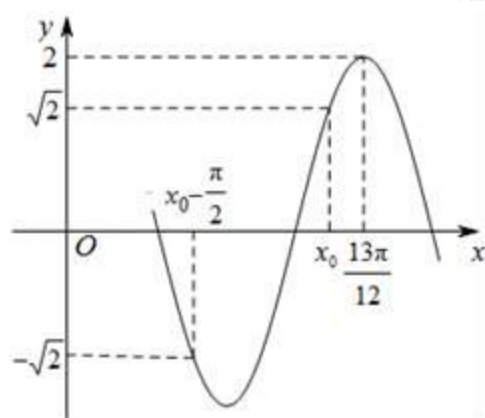
- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

三、解答题（14分+14分+14分+16分+18分，共76分）

17. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\phi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.

(I) 写出函数 $f(x)$ 的解析式及 x_0 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值与最小值.

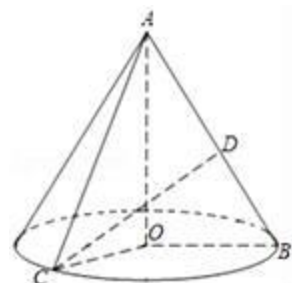


18. 如图，在 $Rt\triangle AOB$ 中， $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$ ，斜边 $AB = 4$ ， D 是 AB 的中点. 现将 $Rt\triangle AOB$ 以直角边 AO 为轴旋转一周得到一个圆锥，点 C 为圆锥底面圆周上的一点，且 $\angle BOC = \frac{\pi}{2}$.

(1) 求该圆锥的全面积;

(2) 求异面直线 AO 与 CD 所成角的大小.

(结果用反三角函数值表示)



19. 已知命题 P : 函数 $f(x) = \frac{1}{3}(1-x)$ 且 $|f(a)| < 2$, 命题 Q : 集合 $A = \{x | x^2 + (a+2)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | x > 0\}$ 且 $A \cap B = \emptyset$,

- (1) 分别求命题 P、Q 为真命题时的实数 a 的取值范围；
- (2) 当实数 a 取何范围时，命题 P、Q 中有且仅有一个为真命题；
- (3) 设 P、Q 皆为真时 a 的取值范围为集合 S , $T = \{y | y = x + \frac{m}{x}, x \in \mathbb{R}, x \neq 0, m > 0\}$, 若 $\complement_{\mathbb{R}} T \subseteq S$, 求 m 的取值范围.

20. 定义 $\max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ 表示 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 中的最大值.

已知数列 $a_n = \frac{1000}{n}$, $b_n = \frac{2000}{m}$, $c_n = \frac{1500}{p}$, 其中 $n+m+p=200$, $m=kn$, n, m, p, k

$\in \mathbb{N}^*$. 记 $d_n = \max\{a_n, b_n, c_n\}$

- (I) 求 $\max\{a_n, b_n\}$
- (II) 当 $k=2$ 时, 求 d_n 的最小值;
- (III) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, 求 d_n 的最小值.

21. 已知点 P 到圆 $(x+2)^2 + y^2 = 1$ 的切线长与到 y 轴的距离之比为 t ($t > 0, t \neq 1$);

- (1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;
- (2) 当 $t = \sqrt{3}$ 时, 将轨迹 C 的图形沿着 x 轴向左移动 1 个单位, 得到曲线 G, 过曲线 G 上一点 Q 作两条渐近线的垂线, 垂足分别是 P_1 和 P_2 , 求 $\overrightarrow{QP_1} \cdot \overrightarrow{QP_2}$ 的值;
- (3) 设曲线 C 的两焦点为 F_1, F_2 , 求 t 的取值范围, 使得曲线 C 上不存在点 Q, 使 $\angle F_1 Q F_2 = \theta$ ($0 < \theta < \pi$).

2016-2017 学年高三（上）12 月月考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（前 6 题每小题 6 分，后 6 题每小题 6 分，共 54 分）

1. 计算： $\frac{1+i}{1-i}^{2017} = \underline{i}$ （ i 是虚数单位）

【考点】复数代数形式的混合运算.

【分析】 $i^{2017} = (i^4)^{504} \cdot i = i$ ，可得原式 $= \frac{1+i}{1-i}$ ，再利用复数的运算法则即可得出.

【解答】解： $i^{2017} = (i^4)^{504} \cdot i = i$,

$$\text{原式} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i,$$

故答案为： i .

2. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的渐近线的夹角为 $\underline{\frac{\pi}{3}}$.

【考点】双曲线的简单性质.

【分析】根据题意，由双曲线的方程可得渐近线方程，求出渐近线的倾斜角，结合图形分析可得答案.

【解答】解：根据题意，双曲线的方程为： $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$,

则其渐近线方程为： $y = \pm \sqrt{3}x$,

直线 $y = \sqrt{3}x$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ ，直线 $y = -\sqrt{3}x$ 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$,

则其渐近线的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,

故答案为： $\frac{\pi}{3}$.

3. 在二项式 $(x + \frac{2}{x})^6$ 的展开式中，常数项等于 $\underline{160}$.

【考点】二项式定理.

【分析】展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r = 2^r C_6^r x^{6-2r}$ ，要求常数项，只要令 $6 - 2r = 0$ 可得 r ，代入即可求

【解答】解：展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r = 2^r C_6^r x^{6-2r}$

令 $6 - 2r = 0$ 可得 $r = 3$

常数项为 $2^3 C_6^3 = 160$

故答案为：160

4. 设全集 $U = \mathbb{R}$ ，已知 $A = \{x \mid \frac{2x+3}{x-2} > 0\}$ ， $B = \{x \mid |x-1| < 2\}$ ，则 $A \cap B = \underline{\{x \mid 2 < x < 3\}}$ 。

【考点】交集及其运算。

【分析】先分别求出集合 A 和 B ，由此能求出 $A \cap B$ 。

【解答】解： $\because A = \{x \mid \frac{2x+3}{x-2} > 0\}$ ， $B = \{x \mid |x-1| < 2\}$ ，

$\therefore A = \{x \mid x < -\frac{3}{2} \text{ 或 } x > 2\}$ ， $B = \{x \mid -1 < x < 3\}$ ，

$A \cap B = \{x \mid 2 < x < 3\}$ 。

故答案为： $\{x \mid 2 < x < 3\}$ 。

5. 函数 $f(x) = \frac{(x+3)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域是 $\underline{(-\infty, -3) \cup (-3, 0)}$ 。

【考点】函数的定义域及其求法。

【分析】由 0 指数幂的底数不为 0，分母中根式内部的代数式大于等于 0 联立不等式组求解。

【解答】解：由 $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ |x|-x > 0 \end{cases}$ ，解得 $x < 0$ 且 $x \neq -3$ 。

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{(x+3)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域是： $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ 。

故答案为： $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ 。

6. 幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{-m}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时为减函数，则 m 的值为

2.

【考点】幂函数的概念、解析式、定义域、值域.

【分析】利用幂函数的定义和单调性即可求出.

【解答】解：∵幂函数 $y = (m^2 - m - 1)x^{-m}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时为减函数，

∴ m 必满足 $\begin{cases} m^2 - m - 1 = 1 \\ -m < 0 \end{cases}$ ，解得 $m = 2$ ，即 $y = x^{-2}$.

故答案为：2.

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 2$ ， $a_3 = 1$ ，则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1}) = \frac{32}{3}$.

【考点】数列的极限.

【分析】利用 $a_2 = 2$ ， $a_3 = 1$ ，两式相除可求得 q ，根据 $a_2 = 2$ 进而可求得 a_1 再根据数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 为以 q^2 为公比，8 为首项等比数列，根据等比数列的求和公式可得 $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1}$ ，进而答案可得.

【解答】解： $a_2 = 2$ ， $a_3 = 1$ ，解得 $q = \frac{1}{2}$ ，

得 $a_1 = 4$ ， $a_1 a_2$ ， $a_2 a_3$ ， $\dots$ ， $a_n a_{n+1}$ ，是公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列，首项为：8.

$$\therefore a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1} = \frac{8(1 - (\frac{1}{4})^n)}{1 - \frac{1}{4}}.$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1}) = \frac{8}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{32}{3}.$$

故答案为： $\frac{32}{3}$.

8. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，则 $z = x + 2y$ 的最大值为 2.

【考点】简单线性规划.

【分析】作出不等式对应的平面区域，利用线性规划的知识，通过平移即可求 z

的最大值.

【解答】解: 作出不等式对应的平面区域,

由 $z=x+2y$, 得 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$,

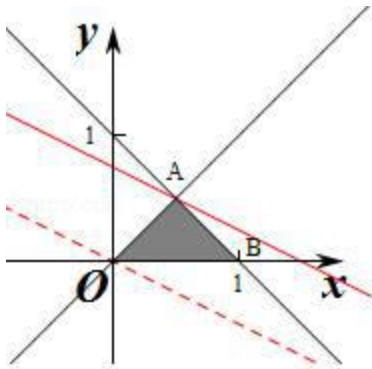
平移直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$, 由图象可知当直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$ 经过点 A 时, 直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$ 的截距最大, 此时 z 最大.

$$\text{由 } \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases},$$

即 $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

此时 z 的最大值为 $z=1+2\times\frac{1}{2}=1+1=2$,

故答案为: 2.



9. 点 P 是棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC_1}$ 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, 0]$.

【考点】平面向量数量积的运算.

【分析】建立空间直角坐标系, 设出点 P 的坐标为 (x, y, z) , 则由题意可得 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z=1$, 计算 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC_1} = x^2 - x$, 利用二次函数的性质求得它的值域即可.

【解答】解: 以点 D 为原点, 以 DA 所在的直线为 x 轴, 以 DC 所在的直线为 y 轴, 以 DD_1 所在的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示;

则点 $A(1, 0, 0)$, $C_1(0, 1, 1)$,

设点 P 的坐标为 (x, y, z) , 由题意可得 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $z=1$;

$$\therefore \overrightarrow{PA} = (1-x, -y, -1), \overrightarrow{PC_1} = (-x, 1-y, 0),$$

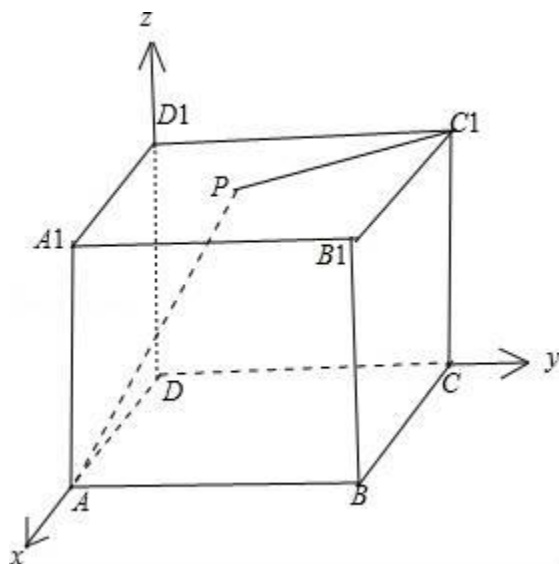
$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC_1} = -x(1-x) - y(1-y) + 0 = x^2 - x + y^2 - y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2},$$

由二次函数的性质可得, 当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC_1}$ 取得最小值为 $-\frac{1}{2}$;

当 $x=0$ 或 1 , 且 $y=0$ 或 1 时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC_1}$ 取得最大值为 0 ,

则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC_1}$ 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, 0]$.

故答案为: $[-\frac{1}{2}, 0]$.



10. 已知关于 x 的不等式 $(4kx - k^2 - 12k - 9)(2x - 11) > 0$, 其中 $k \in \mathbb{R}$, 对于不等式的解集 A , 记 $B = A \cap \mathbb{Z}$ (其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集), 若集合 B 是有限集, 则使得集合 B 中元素个数最少时的实数 k 的取值范围是 $\{2, 3, 4, 5\}$.

【考点】 交集及其运算.

【分析】 对 k 分类讨论, 利用一元二次不等式的解法求出已知不等式的解集确定出 A , 根据 $B = A \cap \mathbb{Z}$ (其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集), 集合 B 为有限集, 即可得出.

【解答】 解: 分情况考虑: ①当 $k < 0$, $A = \{x \mid \frac{k}{4} + \frac{9}{4k} + 3 < x < \frac{11}{2}\}$;

②当 $k=0$, $A = \{x \mid x < \frac{11}{2}\}$;

③当 $0 < k < 1$ 或 $k > 9$, $A = \{x | x < \frac{11}{2}, \text{ 或 } x > \frac{k}{4} + \frac{9}{4k} + 3\}$;

④当 $1 \leq k \leq 9$, $A = \{x | x < \frac{k}{4} + \frac{9}{4k} + 3, \text{ 或 } x > \frac{11}{2}\}$;

$\because B = A \cap \mathbb{Z}$ (其中 $\mathbb{Z}$ 为整数集), 集合 B 为有限集,

只有 $k < 0$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

故答案为: $\{2, 3, 4, 5\}$

11. 设三角形 ABC 的内角 A, B, C 所对的边长分别是 a, b, c , 且 $B = \frac{\pi}{3}$, 若 $\triangle ABC$ 不是钝角三角形, 则 $\frac{2a}{c}$ 的取值范围是 $(1, 4]$.

【考点】余弦定理.

【分析】先求得 C 的范围, 由正弦定理及两角和的正弦函数公式化简 $\frac{2a}{c}$ 为 $1 + \frac{\sqrt{3}\cos C}{\sin C}$, 由角 C 越大, $\frac{2a}{c}$ 越小, 求得 $\frac{2a}{c}$ 的取值范围.

【解答】解: 三角形 ABC 中, $\because B = \frac{\pi}{3}$, 若 $\triangle ABC$ 不是钝角三角形, 由 $A + C = \frac{2\pi}{3}$, 可得 $\frac{\pi}{6} < C \leq \frac{\pi}{2}$.

利用正弦定理可得 $\frac{2a}{c} = \frac{2\sin A}{\sin C} = \frac{2\sin(B+C)}{\sin C} = \frac{\sin C + \sqrt{3}\cos C}{\sin C} = 1 + \frac{\sqrt{3}\cos C}{\sin C}$,

显然, 角 C 越大, $\frac{2a}{c}$ 越小.

当 $C = \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos C = 0$, 则 $\frac{2a}{c} = 1$; 当 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2a}{c} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{\tan C} \in (1, 4)$.

综上所述, $\frac{2a}{c} \in (1, 4]$,

故答案为: $(1, 4]$.

12. 数列 $\{2^n - 1\}$ 的前 n 项 $1, 3, 7, \dots, 2^n - 1$ 组成集合 $A_n = \{1, 3, 7, 2^n - 1\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 从集合 A_n 中任取 k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) 个数, 其所有可能的 k 个数的乘积的和为 T_k (若只取一个数, 规定乘积为此数本身), 记 $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, 例如当 $n = 1$ 时, $A_1 = \{1\}$, $T_1 = 1$, $S_1 = 1$; 当 $n = 2$ 时, $A_2 = \{1, 3\}$, $T_1 = 1 + 3$, $T_2 = 1 \times 3$, $S_2 = 1 + 3 + 1 \times 3 = 7$, 试写出 $S_n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$.

【考点】元素与集合关系的判断.

【分析】通过计算出 S_3 ，并找出 S_1 、 S_2 、 S_3 的共同表示形式，进而利用归纳推理即可猜想结论.

【解答】解：当 $n=3$ 时， $A_3=\{1, 3, 7\}$ ，

则 $T_1=1+3+7=11$ ， $T_2=1\times 3+1\times 7+3\times 7=31$ ， $T_3=1\times 3\times 7=21$ ，

$\therefore S_3=T_1+T_2+T_3=11+31+21=63$ ，

由 $S_1=1=2^1-1=\frac{1\times 2}{2}-1$ ，

$S_2=7=2^3-1=\frac{2\times 3}{2}-1$ ，

$S_3=63=2^6-1=\frac{3\times 4}{2}-1$ ，

...

猜想： $S_n=\frac{n(n+1)}{2}-1$ ，

故答案为： $\frac{n(n+1)}{2}-1$.

二、选择题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 如果 $a < b < 0$ ，那么下列不等式成立的是（ ）

A. $a^2 < ab$ B. $-ab < -b^2$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$

【考点】不等式的基本性质.

【分析】利用不等式的基本性质即可得出.

【解答】解：对于 A：由 $a < b < 0$ ，得： $a^2 > ab$ ，故 A 错误；

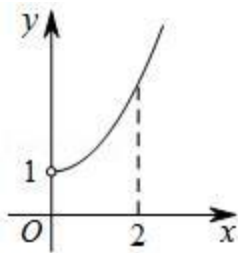
对于 B：若 $a < b < 0$ ，则 $-a > -b > 0$ ， $b < 0$ ， $\therefore -ab < -b^2$ ，故 B 正确；

对于 C：由 $a < b < 0$ ，两边同除以 ab 得： $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ，即 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，故 C 错误；

对于 D： $0 < \frac{b}{a} < 1$ ， $\frac{a}{b} > 1$ ，故 D 错误；

故选：B.

14. 已知函数 $y=f(x)$ ， $x \in \mathbb{R}$ 是奇函数，其部分图象如图所示，则在 $(-1, 0)$ 上与函数 $f(x)$ 的单调性相同的是（ ）



A. $y=x+\frac{1}{x}$ B. $y=\log_2|x|$

C. $y=\begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ e^{-x} & x < 0 \end{cases}$ D. $y=\cos(2x)$

【考点】函数奇偶性的性质；奇偶性与单调性的综合．

【分析】根据题意，由函数奇偶性的性质分析可得 $y=f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增，据此依次分析选项中函数在区间 $(-1, 0)$ 上的单调性，即可得答案．

【解答】解：根据图象可以判断出 $(0, 1)$ 单调递增，又由函数 $y=f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 是奇函数，

则函数 $y=f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增，

依次分析选项：

对于 A、对于 $y=x+\frac{1}{x}$ ， $y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$ ，当 $-1 < x < 0$ 时， $y' < 0$ ，则 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 是减函数，不符合题意，

对于 B、当 $-1 < x < 0$ 时， $y=\log_2|x|=\log_2(-x)$ ，令 $t=-x$ ，则 $y=\log_2 t$ ， $t=-x$ 在 $(-1, 0)$ 为减函数，而 $y=\log_2 t$ 为增函数，则 $y=\log_2|x|$ 在 $(-1, 0)$ 是减函数，不符合题意，

对于 C、当 $-1 < x < 0$ 时， $y=e^{-x}=(\frac{1}{e})^x$ ，而 $0 < \frac{1}{e} < 1$ ，则 $y=e^{-x}$ 在 $(-1, 0)$ 为减函数，不符合题意，

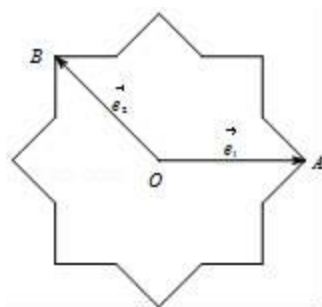
对于 D、 $y=\cos(2x)$ ，当 $-1 < x < 0$ ，则有 $-2 < 2x < 0$ ， $y=\cos(2x)$ 为增函数，符合题意；

故选：D．

故选：D．

15. 将一个圆的八个等分点分成相间的两组，连接每组的四个点得到两个正方形．去掉两个正方形内部的八条线段后可以形成一正八角星，如图所示．设正八

角星的中心为 O ，并且 $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_2$ ，若将点 O 到正八角星 16 个顶点的向量，都写成为 $\lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ ， $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 的形式，则 $\lambda + \mu$ 的最大值为（ ）

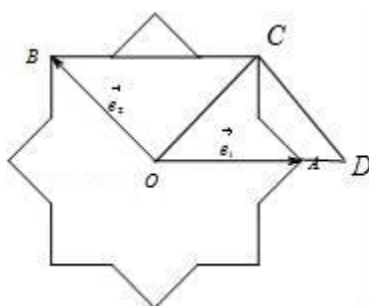


- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $1 + \sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

【考点】 向量在几何中的应用.

【分析】 根据题意找出使得 $\lambda + \mu$ 最大的顶点 C ，根据向量加法的平行四边形法则可作出平行四边形 $OBCD$ ，这样结合图形及向量数乘的几何意义便可得出 $\overrightarrow{OC} = \sqrt{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ，这样由平面向量基本定理即可求出 $\lambda + \mu$ 的最大值.

【解答】 解：如图，根据图形及向量加法的平行四边形法则可看出 O 到顶点 C 的向量 $\overrightarrow{OC} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ ，此时 $\lambda + \mu$ 最大；



作平行四边形 $OBCD$ ，设 $BC = a$ ，根据题意得， $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ；

$$\therefore \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \sqrt{2};$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \sqrt{2}\overrightarrow{OA};$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \sqrt{2}\overrightarrow{OA} = \sqrt{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2;$$

$$\text{又 } \overrightarrow{OC} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2;$$

$$\therefore \lambda + \mu = 1 + \sqrt{2};$$

即 $\lambda + \mu$ 的最大值为 $1 + \sqrt{2}$.

故选 C.

16. 直线 $l: ax + \frac{1}{a}y - 1 = 0$ 与 x, y 轴的交点分别为 A, B, 直线 l 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的交点为 C, D, 给出下面三个结论:

① $\forall a \geq 1, S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}$; ② $\exists a \geq 1, |AB| < |CD|$; ③ $\exists a \geq 1, S_{\triangle COD} < \frac{1}{2}$.

其中, 所有正确结论的序号是 ()

A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

【考点】直线与圆的位置关系.

【分析】①当 $a \geq 1$ 时, 分别可得直线的截距, 由三角形的面积公式易得结论①正确; ②当 $a \geq 1$ 时, 反证法可得结论②错误; ③由三角形的面积公式可得 $S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} \sin \angle AOC \leq \frac{1}{2}$, 可得结论③正确.

【解答】解: ①当 $a \geq 1$ 时, 把 $x=0$ 代入直线方程可得 $y=a$, 把 $y=0$ 代入直线方程可得 $x=\frac{1}{a}$,

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, 故结论①正确;

②当 $a \geq 1$ 时, $|AB| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}$, 故 $|AB|^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$,

直线 l 可化为 $a^2x + y - a = 0$, 圆心 O 到 l 的距离 $d = \frac{|-a|}{\sqrt{a^4 + 1}}$

$= \frac{a}{\sqrt{a^4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}}$, 故 $|CD|^2 = 4(1 - d^2) = 4[1 - (a^2 + \frac{1}{a^2})]$,

假设 $|AB| < |CD|$, 则 $|AB|^2 < |CD|^2$, 即 $a^2 + \frac{1}{a^2} < 4(1 - \frac{1}{a^2 + \frac{1}{a^2}})$,

整理可得 $(a^2 + \frac{1}{a^2})^2 - 4(a^2 + \frac{1}{a^2}) + 4 < 0$, 即 $(a^2 + \frac{1}{a^2} - 2)^2 < 0$,

显然矛盾, 故结论②错误;

$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} |OA| |OC| \sin \angle AOC = \frac{1}{2} \sin \angle AOC \leq \frac{1}{2}$,

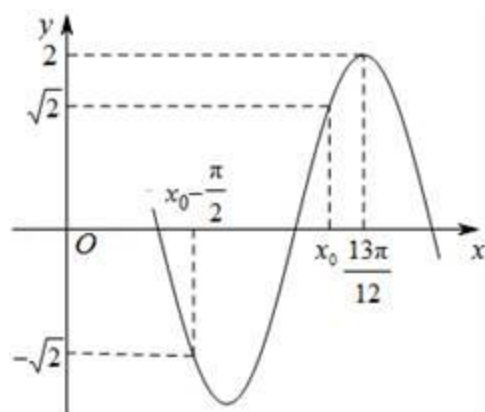
故 $\exists a \geq 1$, 使得 $S_{\triangle COD} < \frac{1}{2}$, 结论③正确.

故选: C.

三、解答题（14 分+14 分+14 分+16 分+18 分，共 76 分）

17. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\phi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示.

- (I) 写出函数 $f(x)$ 的解析式及 x_0 的值;
 (II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值与最小值.



【考点】 由 $y = A\sin(\omega x + \phi)$ 的部分图象确定其解析式；三角函数的最值.

【分析】 (I) 由函数图象可知 $A, T = \pi$, 利用周期公式可求 ω , 又函数过点 $(\frac{13\pi}{12}, 2)$, 结合范围 $|\phi| < \frac{\pi}{2}$, 解得 ϕ , 可求函数解析式, 由函数图象可得 $2\sin(2x_0 + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}$, 可解得 $x_0 = k\pi - \frac{\pi}{24}, k \in \mathbb{Z}$, 又结合范围 $\frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{4} < x_0 < \frac{13\pi}{12}$, 从而可求 x_0 的值.

(II) 由 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 可求范围 $2x + \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$, 利用正弦函数的图象和性质即可求其最值.

【解答】 (本小题满分 13 分)

解: (I) $\because A > 0, \omega > 0$, 由函数图象可知, $A = 2, T = \frac{2\pi}{\omega} = 2[x_0 - (x_0 - \frac{\pi}{2})] = \pi$,
 解得 $\omega = 2$,

又 $\because$ 函数过点 $(\frac{13\pi}{12}, 2)$, 可得: $2 = 2\sin(2 \times \frac{13\pi}{12} + \phi)$, 解得: $2 \times \frac{13\pi}{12} + \phi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$,
 $k \in \mathbb{Z}$,

又 $|\phi| < \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \text{可得: } \phi = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\because \text{由函数图象可得: } 2\sin\left(2x_0 + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}, \text{ 解得: } 2x_0 + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 可得:}$$

$$x_0 = k\pi - \frac{\pi}{24}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{又} \because \frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{4} < x_0 < \frac{13\pi}{12},$$

$$\therefore x_0 = \frac{23\pi}{24}, \dots$$

$$(II) \text{ 由 } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \text{ 可得: } 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right], \dots$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} \text{ 时, 即 } x = -\frac{\pi}{4}, f(x)_{\min} = f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

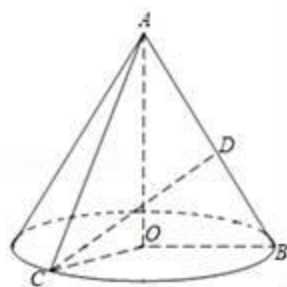
$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ 时, 即 } x = \frac{\pi}{12}, f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2. \quad \dots$$

18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$, 斜边 $AB=4$, D 是 AB 的中点. 现将 $\text{Rt}\triangle AOB$ 以直角边 AO 为轴旋转一周得到一个圆锥, 点 C 为圆锥底面圆周上的一点, 且 $\angle BOC = \frac{\pi}{2}$.

(1) 求该圆锥的全面积;

(2) 求异面直线 AO 与 CD 所成角的大小.

(结果用反三角函数值表示)



【考点】 异面直线及其所成的角; 棱柱、棱锥、棱台的侧面积和表面积.

【分析】 (1) 求出圆锥底面半径, 圆锥的侧面积 $S_{\text{侧}}$, 然后求解圆锥的全面积.

(2) 过 D 作 $DM \parallel AO$ 交 BO 于 M , 连 CM , 说明 $\angle CDM$ 为异面直线 AO 与 CD 所成角, 在 $\text{Rt}\triangle CDM$ 中, 求解异面直线 AO 与 CD 所成角的大小.

【解答】 解: (1) $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $OB=2$

即圆锥底面半径为 2

圆锥的侧面积 $S_{\text{侧}} = \pi r l = 8\pi \dots 4'$

故圆锥的全面积 $S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = 8\pi + 4\pi = 12\pi \dots 6'$

(2) 过 D 作 $DM \parallel AO$ 交 BO 于 M, 连 CM

则 $\angle CDM$ 为异面直线 AO 与 CD 所成角 $\dots 8'$

$\because AO \perp \text{平面 } OBC \therefore DM \perp \text{平面 } OBC \therefore DM \perp MC$

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $AO = 2\sqrt{3} \therefore DM = \sqrt{3}$,

$\because D$ 是 AB 的中点 $\therefore M$ 是 OB 的中点,

$\therefore OM = 1 \therefore CM = \sqrt{5}$.

在 $\text{Rt}\triangle CDM$ 中, $\tan \angle CDM = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$, $\dots 10'$

$\therefore \angle CDM = \arctan \frac{\sqrt{15}}{3}$,

即异面直线 AO 与 CD 所成角的大小为 $\arctan \frac{\sqrt{15}}{3} \dots 12'$

19. 已知命题 P: 函数 $f(x) = \frac{1}{3}(1-x)$ 且 $|f(a)| < 2$, 命题 Q: 集合 $A = \{x | x^2 + (a+2)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | x > 0\}$ 且 $A \cap B = \emptyset$,

(1) 分别求命题 P、Q 为真命题时的实数 a 的取值范围;

(2) 当实数 a 取何范围时, 命题 P、Q 中有且仅有一个为真命题;

(3) 设 P、Q 皆为真时 a 的取值范围为集合 S, $T = \{y | y = x + \frac{m}{x}, x \in \mathbb{R}, x \neq 0, m > 0\}$,

若 $\complement_{\mathbb{R}} T \subseteq S$, 求 m 的取值范围.

【考点】 集合关系中的参数取值问题.

【分析】 (1) 由题意可得, 由 $|f(a)| = |\frac{1}{3}(1-a)| < 2$ 解不等式可得 P: $a \in (-5, 7)$; 由 $A \cap B = \emptyset$, 可得 A 有两种情况

①若 $A = \emptyset$, 则 $\Delta = (a+2)^2 - 4 < 0$, ②若 $A \neq \emptyset$, 则 $\begin{cases} \Delta = (a+2)^2 - 4 \geq 0 \\ -(a+2) < 0 \end{cases}$, 解可得 Q

(2) 当 P 为真, 则 $\begin{cases} -5 < a < 7 \\ a \leq -4 \end{cases}$; 当 Q 为真, 则 $\begin{cases} a \leq -5 \text{ 或 } a \geq 7 \\ a > -4 \end{cases}$ 可求

(3) 当 P, Q 都为真时, $\begin{cases} -5 < a < 7 \\ a > -4 \end{cases}$ 可求 $S = (-4, 7)$, 利用基本不等式可求 T,

进而可求 $C_R T$, 然后根据 $C_R T \subseteq S$, 可求

【解答】解: (1) 由题意可得, 由 $|f(a)| = \left| \frac{1}{3}(1-a) \right| < 2$ 可得 $-6 < a - 1 < 6$

解可得, $-5 < a < 7$

$\therefore P: a \in (-5, 7)$

$\because$ 集合 $A = \{x | x^2 + (a+2)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | x > 0\}$ 且 $A \cap B = \emptyset$,

①若 $A = \emptyset$, 则 $\Delta = (a+2)^2 - 4 < 0$, 即 $-4 < a < 0$

②若 $A \neq \emptyset$, 则 $\begin{cases} \Delta = (a+2)^2 - 4 \geq 0 \\ -(a+2) < 0 \end{cases}$, 解可得, $a \geq 0$

综上可得, $a > -4$

$\therefore Q: a \in (-4, +\infty)$

(2) 当 P 为真, 则 $\begin{cases} -5 < a < 7 \\ a \leq -4 \end{cases}$, $a \in (-5, -4]$;

当 Q 为真, 则 $\begin{cases} a \leq -5 \text{ 或 } a \geq 7 \\ a > -4 \end{cases}$, $a \in [7, +\infty)$

所以 $a \in (-5, -4] \cup [7, +\infty)$

(3) 当 P, Q 都为真时, $\begin{cases} -5 < a < 7 \\ a > -4 \end{cases}$ 即 $S = (-4, 7)$

$T = (-\infty, -2\sqrt{m}] \cup [2\sqrt{m}, +\infty)$

$\therefore C_R T = (-2\sqrt{m}, 2\sqrt{m}) \subseteq (-4, 7)$

$\therefore \begin{cases} -2\sqrt{m} \geq -4 \\ 2\sqrt{m} \leq 7 \end{cases} \Rightarrow m \leq 4$

综上 $m \in (0, 4]$

20. 定义 $\max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ 表示 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 中的最大值.

已知数列 $a_n = \frac{1000}{n}$, $b_n = \frac{2000}{m}$, $c_n = \frac{1500}{p}$, 其中 $n+m+p=200$, $m=kn$, n, m, p, k

$\in \mathbb{N}^*$. 记 $d_n = \max\{a_n, b_n, c_n\}$

(I) 求 $\max\{a_n, b_n\}$

(II) 当 $k=2$ 时, 求 d_n 的最小值;

(III) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, 求 d_n 的最小值.

【考点】 数列的应用.

【分析】 (I) 由题意, $\max\{a_n, b_n\} = \max\{\frac{1000}{n}, \frac{2000}{kn}\}$, $\frac{1000}{n} - \frac{2000}{kn} = \frac{1000(k-2)}{kn}$,
分别求得 $k=1$ 、 $k=2$ 及 $k \geq 3$ 时, 分别求得 $\max\{a_n, b_n\}$;

(II) 当 $k=2$ 时, 由 (I) 可得 $d_n = \max\{a_n, c_n\} = \max\{\frac{1000}{n}, \frac{1500}{200-3n}\}$, 根据
数列的单调性求得 $n = \frac{400}{9}$, d_n 取得最小值, $44 < \frac{400}{9} < 45$, 分别求得 d_{44} 和 d_{45} ,
比较即可求得 d_n 取得最小值;

(III) 由 (II) 可知, 当 $k=2$ 时, d_n 的最小值为 $\frac{250}{11}$, 当 $k=1$ 及 $k \geq 3$ 时, 根据函
数单调性, 分别求得可能取最小值时, n 的取值, 比较即可求得 d_n 取得最小值;

【解答】 解: (I) 由题意, $\max\{a_n, b_n\} = \max\{\frac{1000}{n}, \frac{2000}{kn}\}$,

因为 $\frac{1000}{n} - \frac{2000}{kn} = \frac{1000(k-2)}{kn}$,

所以, 当 $k=1$ 时, $\frac{1000}{n} < \frac{2000}{kn}$, 则 $\max\{a_n, b_n\} = b_n = \frac{2000}{kn}$,

当 $k=2$ 时, $\frac{1000}{n} = \frac{2000}{kn}$, 则 $\max\{a_n, b_n\} = a_n = \frac{1000}{n}$,

当 $k \geq 3$ 时, $\frac{1000}{n} > \frac{2000}{kn}$, 则 $\max\{a_n, b_n\} = a_n = \frac{1000}{n}$

(II) 当 $k=2$ 时, $d_n = \max\{a_n, b_n, c_n\} = \max\{a_n, c_n\} = \max\{\frac{1000}{n}, \frac{1500}{200-3n}\}$,

因为数列 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 数列 $\{c_n\}$ 为单调递增数列,

所以当 $\frac{1000}{n} = \frac{1500}{200-3n}$ 时, d_n 取得最小值, 此时 $n = \frac{400}{9}$.

又因为 $44 < \frac{400}{9} < 45$,

而 $d_{44} = \max\{a_{44}, c_{44}\} = a_{44} = \frac{250}{11}$, $d_{45} = c_{45} = \frac{300}{13}$, 有 $d_{44} < d_{45}$.

所以 d_n 的最小值为 $\frac{250}{11}$

(III) 由 (II) 可知, 当 $k=2$ 时, d_n 的最小值为 $\frac{250}{11}$.

当 $k=1$ 时, $d_n = \max\{a_n, b_n, c_n\} = \max\{b_n, c_n\} = \max\{\frac{2000}{n}, \frac{750}{100-n}\}$.

因为数列 $\{b_n\}$ 为单调递减数列, 数列 $\{c_n\}$ 为单调递增数列,

所以当 $\frac{2000}{n} = \frac{750}{100-n}$ 时, d_n 取得最小值, 此时 $n = \frac{800}{11}$.

又因为 $72 < \frac{800}{11} < 73$,

而 $d_{72} = b_{72} = \frac{250}{9}$, $d_{72} = c_{72} = \frac{250}{9}$.

此时 d_n 的最小值为 $\frac{250}{9}$, $\frac{250}{9} > \frac{250}{11}$.

(2) $k \geq 3$ 时, $\frac{1500}{200-(1+k)n} \geq \frac{1500}{200-4n} = \frac{375}{50-n}$, $a_n > b_n$,

所以 $d_n = \max\{a_n, b_n, c_n\} = \max\{a_n, c_n\} \geq \max\{\frac{1000}{n}, \frac{375}{50-n}\}$.

设 $h_n = \max\{\frac{1000}{n}, \frac{375}{50-n}\}$,

因为数列 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 数列 $\{\frac{375}{50-n}\}$ 为单调递增数列,

所以当 $\frac{1000}{n} = \frac{375}{50-n}$ 时, h_n 取得最小值, 此时 $n = \frac{400}{11}$.

又因为 $36 < \frac{400}{11} < 37$,

而 $h_{36} = a_{36} = \frac{250}{9}$, $h_{37} = \frac{375}{13}$, $\frac{250}{9} < \frac{375}{13}$.

此时 d_n 的最小值为 $\frac{250}{9}$, $\frac{250}{9} > \frac{250}{11}$.

综上, d_n 的最小值为 $d_{44} = \frac{250}{11}$

21. 已知点 P 到圆 $(x+2)^2 + y^2 = 1$ 的切线长与到 y 轴的距离之比为 t ($t > 0$, $t \neq 1$);

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 当 $t = \sqrt{3}$ 时, 将轨迹 C 的图形沿着 x 轴向左移动 1 个单位, 得到曲线 G, 过曲线 G 上一点 Q 作两条渐近线的垂线, 垂足分别是 P_1 和 P_2 , 求 $\overrightarrow{QP_1} \cdot \overrightarrow{QP_2}$ 的值;

(3) 设曲线 C 的两焦点为 F_1, F_2 , 求 t 的取值范围, 使得曲线 C 上不存在点 Q, 使 $\angle F_1 Q F_2 = \theta$ ($0 < \theta < \pi$).

【考点】 轨迹方程.

【分析】 (1) 设 P (x, y), 则 P 到圆的切线长为 $\sqrt{(x+2)^2 + y^2 - 1}$, 利用勾股定理列方程化简即可得出动点 P 的轨迹 C 的方程;

(2) 当 $t=\sqrt{3}$ 时, 轨迹 C 的方程化为: $\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{5} = 1$. 可得曲线 G 的方程为

$\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{5} = 1$. 可得曲线 G 的渐近线方程为 $y=\sqrt{2}x$, $y=-\sqrt{2}x$. 设 $Q(x_0, y_0)$, P_1

$(m, \sqrt{2}m)$, $P_2(n, -\sqrt{2}n)$, $\frac{y_0-\sqrt{2}m}{x_0-m} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{y_0+\sqrt{2}n}{x_0-n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 可得 m, n . 又

$y_0^2=2x_0^2-5$, 利用数量积运算性质即可得出;

(3) 对曲线 C 得类型进行讨论, 得出 $\angle F_1 Q F_2$ 的最大值, 利用三角恒等变换列不等式解出 t 的范围.

【解答】解: (1) 圆 $(x+2)^2+y^2=1$ 的圆心为 $M(-2, 0)$, 半径 $r=1$,

设 $P(x, y)$, 则 P 到圆的切线长为 $\sqrt{(x+2)^2+y^2-1}$,

$$\therefore \sqrt{(x+2)^2+y^2-1} = t|x|,$$

$$\therefore (x+2)^2+y^2-1 = t^2x^2,$$

整理得 $(1-t^2)x^2+y^2+4x+3=0$.

则动点 P 的轨迹 C 的方程为: $(1-t^2)x^2+y^2+4x+3=0$.

(2) 当 $t=\sqrt{3}$ 时, 轨迹 C 的方程为 $-2x^2+4x+3+y^2=0$, 即 $\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{5} = 1$.

$\therefore$ 曲线 G 的方程为 $\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{5} = 1$.

$\therefore$ 曲线 G 的渐近线方程为 $y=\sqrt{2}x$, $y=-\sqrt{2}x$.

设 $Q(x_0, y_0)$, $P_1(m, \sqrt{2}m)$, $P_2(n, -\sqrt{2}n)$,

$$\therefore \frac{y_0-\sqrt{2}m}{x_0-m} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{y_0+\sqrt{2}n}{x_0-n} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore m = \frac{2y_0+\sqrt{2}x_0}{3\sqrt{2}}, \quad n = \frac{\sqrt{2}x_0-2y_0}{3\sqrt{2}},$$

$$\therefore \frac{x_0^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y_0^2}{5} = 1, \quad \therefore y_0^2 = 2x_0^2 - 5,$$

$$\therefore \overrightarrow{QP_1} \cdot \overrightarrow{QP_2} = (m-x_0)(n-x_0) + (\sqrt{2}m-y_0)(-\sqrt{2}n-y_0) = (m-x_0)(n-x_0)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_0-m) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x_0-n) \\
& = \frac{1}{2}(m-x_0)(n-x_0), \\
& = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y_0-2\sqrt{2}x_0}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{-2\sqrt{2}x_0-2y_0}{3\sqrt{2}} = \frac{2x_0^2-y_0^2}{9} = \frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

(3) 曲线 C 的方程可化为 $(1-t^2)(x+\frac{2}{1-t^2})^2+y^2=\frac{4}{1-t^2}-3$,

当 $0 < t < 1$ 时, 曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆, 椭圆标准方程为

$$\frac{(x+\frac{2}{1-t^2})^2}{\frac{3t^2+1}{(1-t^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{3t^2+1}{1-t^2}} = 1$$

$\therefore$ 当 Q 为短轴端点时, $\angle F_1QF_2$ 取得最大值, 设 $\angle F_1QF_2$ 的最大值为 α , 则

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{\frac{3t^2+1}{(1-t^2)^2} - \frac{3t^2+1}{1-t^2}}{\frac{3t^2+1}{1-t^2}} = \frac{t^2}{1-t^2},$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = 1 - 2t^2,$$

若曲线 C 上不存在点 Q, 使 $\angle F_1QF_2 = \theta$, 则 $\theta > \alpha$,

$$\therefore \cos \theta < 1 - 2t^2, \text{ 解得 } 0 < t < \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}.$$

当 $t > 1$ 时, 曲线 C 为焦点在 x 轴的双曲线, $\therefore 0 < \angle F_1QF_2 \leq \pi$,

$\therefore$ 当 $0 < \theta < \pi$ 时, 曲线 C 上始终存在的 Q 使得 $\angle F_1QF_2 = \theta$.

综上, 当 $0 < t < \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$ 时, 曲线 C 上不存在点 Q, 使 $\angle F_1QF_2 = \theta$.

2017 年 5 月 16 日