

2015-2016 学年度下学期期中测试

高一数学试卷

考试时间：120 分钟 试题满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）：

1. 已知角 α 的终边经过点 $(-4k, 3k), k > 0$ ，则 $\cos \alpha =$ ()

- (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $-\frac{3}{5}$ (D) $-\frac{4}{5}$

2. 若向量 $\vec{a} = (x+1, 2x-2)$ ， $\vec{b} = (2, 1)$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $x =$ ()

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) 0 (D) 1

3. 若 $f(\sin x) = 2 - \cos 2x$ ，则 $f(\cos \frac{\pi}{6}) =$ ()

- (A) $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$

4. 已知向量 $\vec{a} = (-1, 0)$ ， $\vec{b} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ，则向量 \vec{a} ， \vec{b} 的夹角为 ()

- (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $-\frac{2\pi}{3}$

5. 在下列四个函数中最小正周期为 π 的所有函数为 ()

① $y = |\sin x|$ ； ② $y = \cos |2x|$ ； ③ $y = \tan(2x + \frac{\pi}{6})$ ； ④ $y = |\sin x + \frac{1}{2}|$

- (A) ①② (B) ①③ (C) ②④ (D) ③④

6. 已知在平面直角坐标系内三个点的坐标分别为 $A(1, 1)$ ， $B(5, 4)$ ， $C(3, -1)$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

- (A) $5\sqrt{2}$ (B) 5 (C) $7\sqrt{2}$ (D) 7

7. 已知 $\tan \frac{\alpha}{2} = 2$ ，则 $\sin \alpha =$ ()

- (A) $\frac{4}{5}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $-\frac{3}{5}$

8. $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边， $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $b = \sqrt{3}$ ，且 $\angle B = \frac{\pi}{3}$ ，

三、解答题（本大题共 6 小题）：

17.（本小题 10 分）已知函数 $f(x) = 2 \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$)，且 $y = f(x)$ 的图

像的一个对称中心到最近的对称轴的距离为 $\frac{\pi}{4}$ ，且 $y = f(x)$ 图像过点 $P(\frac{\pi}{12}, 1)$ ，

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(II) 求函数 $f(x)$ 的零点；

(III) 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

18.（本小题 12 分）已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ， $|\overline{AB}| = 6$ ， $|\overline{AC}| = 10$ ，

(I) 设 D 为边 BC 的中点，求中线 AD 的长；

(II) 设点 E 满足 $\overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{EC}$ ，点 F 满足 $\overline{AF} = 2 \overline{FC}$ ，求线段 EF 的长度.

19.（本小题 12 分）

(I) 证明 $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ ；

(II) 求函数 $f(x) = \frac{8 \sin x \cos x - \sin x - \cos x + 5}{1 + 2 \sin x \cos x}$ $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 的值域.

20.（本小题 12 分）已知函数 $f(x)$ 图像是由函数 $g(x) = \sin x$ 经过如下变换得到的：先将 $g(x)$ 的图像上所有点的纵坐标伸长到原来的 3 倍，再将图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式，并写出其对称轴方程；

(II) 已知关于 x 的方程 $f(x) + g(x) = m$ 在 $[0, 2\pi)$ 内有两个不同的解 α, β ，

① 求实数 m 的取值范围；

② 证明： $\cos(\alpha - \beta) = \frac{m^2}{5} - 1$.

21.（本小题 12 分）国际足联对于足球场地的尺寸有一个具有弹性的标准：理想的足球场地的长度应为 105 米，而各块足球场地可根据实际情况规划其长度，但长度必须在 90 米至

120米范围之内.实验中学锋翼足球社的某位同学好奇学校足球场的实际长度是否符合国际足联的标准,打算根据刚刚学习的解三角形知识进行测量.他的测量方法如下:

(1) 定义足球场西侧足球门的南门柱为标记点 A , 足球场东侧足球门的南门柱为标记点 B , 这样就可以根据测量 AB 两点之间的距离来估计足球场的长度;

(2) 通过自己设计的简易量角装置, 首先在班级前窗的观察点 C 测量得到线段 AC 与窗台线段 CD 所在直线的夹角为 α_1 , 线段 BC 与窗台线段 CD 所在直线的夹角为 α_2 ;

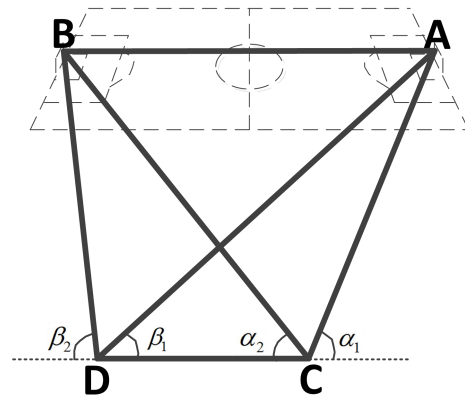
(3) 他沿着窗台移动了一段距离, 到达观测点 D , 测量得到线段 CD 长度为 l (假定测量过程中 A, B, C, D 四点共面, 且整个测量过程不能保证线段 AB 与线段 CD 平行);

(4) 在观测点 D 测得, 线段 AD 与窗台线段 CD 所在直线的夹角为 β_1 , 线段 BD 与窗台线段 CD 所在直线的夹角为 β_2 .

根据上述数据, 他如愿计算算出了足球场的长度. 请问:

(I) 他是如何根据测量数据 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 和 l 来计算足球场的长度 AB 的?

(II) 若已知 $\alpha_1 = 30^\circ, \alpha_2 = 30^\circ, \beta_1 = 26^\circ, \beta_2 = 36^\circ$ 和 $l = 10$ 米, 请估算省实验中学操场的长度是否符合国际足联的标准.



可能用到的参数如下:

$$\sin 4^\circ = 0.07, \quad \cos 4^\circ = 0.998, \quad \tan 4^\circ = 0.07, \quad \cot 4^\circ = 14.30$$

$$\sin 6^\circ = 0.10, \quad \cos 6^\circ = 0.995, \quad \tan 6^\circ = 0.11, \quad \cot 6^\circ = 9.51$$

$$\sin 26^\circ = 0.44, \quad \cos 26^\circ = 0.90, \quad \tan 26^\circ = 0.49, \quad \cot 26^\circ = 2.05$$

$$\sin 36^\circ = 0.59, \quad \cos 36^\circ = 0.81, \quad \tan 36^\circ = 0.73, \quad \cot 36^\circ = 1.38$$

$$\sqrt{3} = 1.73$$

22. (本小题 12 分) $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, S 为 $\triangle ABC$ 的面积,

(I) 证明: $\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(A - B)}{\sin C}$;

(II) 若 $S = (a + b)^2 - c^2, a + b = 17$, 求此时 S 的最大值;

(III) 试比较 $a^2 + b^2 + c^2$ 与 $4\sqrt{3}S$ 的大小.