

2015—2016 学年度上学期期末考试高三年级

数学（理科）参考答案与评分参考

说明：

一、本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对解答题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确答案应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

一、选择题	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
参考答案	B	D	B	B	A	C	B	C	C	B	C	A

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 4 14. 1 15. 12 16. 2

三、解答题：本大题共 6 小题，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分 12 分）

$$(I) \quad f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1 \because x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}] \quad \therefore 2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$$

$$\therefore \sin(2x - \frac{\pi}{6}) \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1] \text{ 所以 } f(x) \text{ 的最小值是 } -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 最大值是 } 0. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(II) \quad \because f(C) = 0 \therefore \sin(2C - \frac{\pi}{6}) = 1 \because C \in (0, \pi) \therefore 2C - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$$

$$\therefore 2C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \therefore C = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because \text{向量 } \mathbf{m} = (1, \sin A) \text{ 与向量 } \mathbf{n} = (2, \sin B) \text{ 共线, } \therefore \frac{1}{2} = \frac{\sin A}{\sin B}, \text{ 由正弦定理得 } \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \quad \textcircled{1}$$

由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{3}$ ，即 $a^2 + b^2 - ab = 3$ ②

由①②, 解得 $a = 1, b = 2$12 分

18. (本小题满分 12 分)

解: (I) 记“该生考上大学”的事件为事件 A, 其对立事件为 $\bar{A}$, 则

$P(\bar{A}) = C_4^1 (\frac{1}{3}) (\frac{2}{3})^3 (\frac{2}{3}) + (\frac{2}{3})^4 = \frac{64}{243} + \frac{16}{81} = \frac{112}{243}$. $\therefore P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{112}{243} = \frac{131}{243}$4 分

(II) 该生参加测试次数 ξ 的可能取值为 2, 3, 4, 5.

$P(\xi = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, $P(\xi = 3) = C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$,

$P(\xi = 4) = C_3^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^4 = \frac{4}{27} + \frac{16}{81} = \frac{28}{81}$, $P(\xi = 5) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$8 分

故 ξ 的分布列为:

ξ	2	3	4	5
P	1/9	4/27	28/81	32/81

.....10 分

$E\xi = 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times \frac{4}{27} + 4 \times \frac{28}{81} + 5 \times \frac{32}{81} = \frac{326}{81}$.

.....12 分

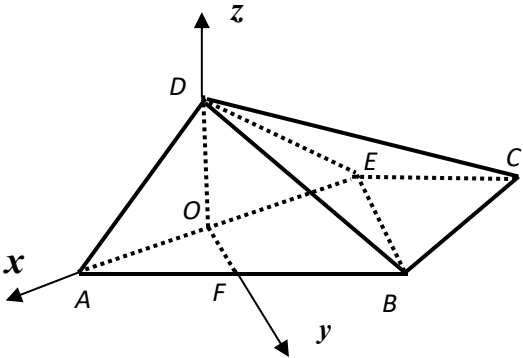
19. (本小题满分 12 分)

(I) 证明: 因为 $BE = AE = \sqrt{2}, AB = 2$, 所以 $BE \perp AE$.

又平面 $DAE \perp$ 平面 $ABCE$, 且平面 $DAE \cap$ 平面 $ABCE = AE$,

所以 $BE \perp$ 平面 ADE4 分

(II)



如图, 取 AE 的中点 O , 则 $DO \perp$ 面 $ABCE$. 作 $OF \parallel EB$, 则 $OF \perp AE$. 以 O 为原点, OA 、 OF 、 OD 为轴建立空间坐标系 $O - xyz$

则 $D(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ $B(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 0)$

$C(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$

所以 $\overrightarrow{BC} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

$$\overrightarrow{DB} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), \overrightarrow{DA} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

设面 DBC 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \end{cases}, \text{取 } \vec{n}_1 = (1, -1, -3) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

由 (I) 知 $BE \perp AD$, 又 $AD \perp DE$, $\therefore AD \perp$ 平面 BED

设的法向量为 $\vec{n}_2$, 则 $\vec{n}_2 \parallel \overrightarrow{AD}$, 取 $\vec{n}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{2\sqrt{22}}{11}$, 所以所求二面角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. (本小题满分 12 分)

解 (I) 由题意: $F_1(0,1)$, 抛物线准线 $y = -1$, 所以 M 点的纵坐标为 $\frac{2}{3}$.

再有抛物线的方程得到 $M(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2}{3}) \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

将 $M(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2}{3})$ 带入 $\frac{y^2}{b^2+1} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ 得到 $b^2 = 3$ 或 $-\frac{8}{9}$ (舍)

所以 $C_1: \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II) **方法一:** 设点 Q、A、B 的坐标分别为 $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

记 $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$, 则 $\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$

又 A, P, B, Q 四点共线, 从而 $\overrightarrow{AP} = -\lambda \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{AQ} = \lambda \overrightarrow{QB}$

$$\therefore \begin{cases} (1-x_1, 3-y_1) = -\lambda(x_2-1, y_2-3) \\ (x-x_1, y-y_1) = \lambda(x_2-x, y_2-y) \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x_1 - \lambda x_2 = 1 - \lambda \cdots \cdots \langle 1 \rangle \\ y_1 - \lambda y_2 = 3 - 3\lambda \cdots \cdots \langle 2 \rangle \\ x_1 + \lambda x_2 = x + \lambda x \cdots \cdots \langle 3 \rangle \\ y_1 + \lambda y_2 = y + \lambda y \cdots \cdots \langle 4 \rangle \end{cases} \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle \times \langle 3 \rangle \text{ 得 } x_1^2 - \lambda^2 x_2^2 &= (1 - \lambda^2)x \cdots \cdots \langle 5 \rangle \\ \langle 2 \rangle \times \langle 4 \rangle \text{ 得 } y_1^2 - \lambda^2 y_2^2 &= 3(1 - \lambda^2)y \cdots \cdots \langle 6 \rangle \end{aligned} \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} 3y_1^2 + 4x_1^2 = 12 \\ 3y_2^2 + 4x_2^2 = 12 \end{cases} \therefore 4x \langle 5 \rangle + 3y \langle 6 \rangle \text{ 得 } 12 - 12\lambda^2 &= 4(1 - \lambda^2)x + 9(1 - \lambda^2)y \\ \text{即 } 4x + 9y - 12 &= 0 \cdots \cdots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

方法二：①若斜率不存在，则 $A(1, \frac{2\sqrt{6}}{3})$, $B(1, -\frac{2\sqrt{6}}{3})$ 或 $(A(1, -\frac{2\sqrt{6}}{3}) B(1, \frac{2\sqrt{6}}{3}))$

$$\text{设 } Q(1, y_Q), \text{ 解得 } y_Q = \frac{3}{4}, \therefore Q(1, \frac{8}{9}) \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

② 设 $AB: y = k(x - 1) + 3$, 点 Q、A、B 的坐标分别为 $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

$$\therefore \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|} \therefore |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{AQ}| |\overrightarrow{PB}|, \text{ 有 } (1 - x_1)(x - x_2) = (x_1 - x)(1 - x_2)$$

$$\text{即 } 2x + 2x_1x_2 - (x + 1)(x_1 + x_2) = 0 \cdots \cdots (*) \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x - 1) + 3 \\ \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (4 + 3k^2)x^2 + 6(3 - k)kx + 3(3 - k)^2 - 12 = 0$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-6(3 - k)k}{4 + 3k^2}, x_1x_2 = \frac{3(3 - k)^2 - 12}{4 + 3k^2} \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

$$\text{带入 } (*) \text{ 式得: } 2x + \frac{6(3 - k)^2 - 24}{4 + 3k^2} - (x + 1) \frac{-6(3 - k)k}{4 + 3k^2} = 0$$

$\therefore x = 1 - \frac{19}{4+9k}$, 带入直线方程得 $y = \frac{8k+12}{4+9k}$, 消去 k 得 $4x + 9y - 12 = 0$,

(或者 $x = 1 - \frac{19}{4+9k}$ 和 $y = k(x-1) + 3$ 联立消去 k 可得)

而 $Q(1, \frac{8}{9})$ 在直线 $4x + 9y - 12 = 0$ 上,

所以点 Q 总在某定直线上.12 分

21. (本小题满分 12 分)

解: (I) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = \frac{2}{x} + x \ln x$, $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \ln x + 1$, $f(1) = 2$,

$f'(1) = -1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = -x + 3$; 2 分

(II) 存在 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 使得 $g(x_1) - g(x_2) \geq M$ 成立,

等价于: $[g(x_1) - g(x_2)]_{\max} \geq M$,

考察 $g(x) = x^3 - x^2 - 3$, $g'(x) = 3x^2 - 2x = 3x(x - \frac{2}{3})$,

x	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, 2]$	2
$g'(x)$	0	-	0	+	
$g(x)$	-3	递减	极小值 $-\frac{85}{27}$	递增	1

由上表可知: $g(x)_{\min} = g(\frac{2}{3}) = -\frac{85}{27}$, $g(x)_{\max} = g(2) = 1$,

$[g(x_1) - g(x_2)]_{\max} = g(x)_{\max} - g(x)_{\min} = \frac{112}{27}$,

所以满足条件的最大整数 $M = 4$;6 分

(III) 方法一: 由 (2) 知 $g(x)_{\max} = g(2) = 1$

所以原命题等价于 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 时, $f(x) = \frac{a}{x} + x \ln x \geq 1$ 恒成立8 分

等价于 $a \geq x - x^2 \ln x$ 恒成立,

记 $h(x) = x - x^2 \ln x$, $h'(x) = 1 - 2x \ln x - x$, $h'(1) = 0$ 。

记 $m(x) = 1 - 2x \ln x - x$, $m'(x) = -3 - 2 \ln x$, 由于 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$,

$m'(x) = -3 - 2 \ln x < 0$, 所以 $m(x) = h'(x) = 1 - 2x \ln x - x$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上递减,

当 $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $x \in (1, 2]$ 时, $h'(x) < 0$,

即函数 $h(x) = x - x^2 \ln x$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1)$ 上递增, 在区间 $(1, 2]$ 上递减,

所以 $h(x)_{\max} = h(1) = 1$, 所以 $a \geq 1$ 12 分

方法二: 由 (2) 知 $g(x)_{\max} = g(2) = 1$

所以原命题等价于 $[f(x)]_{\min} \geq 1$8 分

$\because f(1) = a, \therefore a \geq 1$. 当 $a \geq 1$, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 时, $f(x) = \frac{a}{x} + x \ln x \geq \frac{1}{x} + x \ln x$.

令 $h(x) = \frac{1}{x} + x \ln x$, 则 $h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1$, $h'(1) = 0$.

又 $h'(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上单调递增,

所以当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 递减;

当 $1 < x < 2$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 递增.

$\therefore h(x) \geq h(1) = 1, \therefore$ 当 $a \geq 1$ 时, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ 时, 恒有 $f(x) \geq h(x) \geq 1, [f(x)]_{\min} = 1$.

故 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$12 分

22. (本小题满分 10 分) 选修 4—1: 几何证明选讲

(I) 证明: AB 为直径, $\therefore \angle ACB = \frac{\pi}{2}$, $\angle CAB + \angle ABC = \frac{\pi}{2}$,

$\because \angle PAC = \angle ABC \therefore \angle PAC + \angle CAB = \frac{\pi}{2}$

$\therefore PA \perp AB$, AB 为直径, $\therefore PA$ 为圆的切线 5 分

(II) $CE = 6k, ED = 5k, AE = 2m, EB = 3m$

$$\because AE \cdot EB = CE \cdot ED \Rightarrow m = \sqrt{5}k$$

$$\because \triangle AEC \sim \triangle DEB \Rightarrow \frac{BD}{8} = \frac{3m}{6k} \Rightarrow BD = 4\sqrt{5}$$

$$\because \triangle CEB \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{BC^2}{AD^2} = \frac{25m^2 - 64}{25m^2 - 80} = \left(\frac{3k}{m}\right)^2 \Rightarrow m = 2, k = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\therefore AB = 10, BD = 4\sqrt{5}$ 在直角三角形 ADB 中

$$\sin \angle BAD = \frac{BD}{AB} = \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\because \angle BCE = \angle BAD \therefore \sin \angle BCE = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. (本小题满分 10 分) 选修 4—4: 坐标系与参数方程

(I) 由 O 的参数方程得圆心 O 的坐标为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

设圆心坐标为 (ρ, θ) , $(\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$;

$$\text{则} \begin{cases} \rho^2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1 \\ \tan \theta = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \end{cases} \quad \text{所以} \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{5\pi}{4} \end{cases}, \therefore \text{圆心 } O \text{ 的极坐标为 } (1, \frac{5\pi}{4}) \quad \dots 5 \text{ 分}$$

(II) 由直线的参数方程得普通方程为 $x + y = 1$,

圆心 O 为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\therefore$ 圆 O 上的点到直线的最大距离为 3

$$\therefore r + \frac{\left| -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right|}{\sqrt{2}} = 3, \text{ 即 } r = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

24. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

解: (I) $\because |2x-1| + |2x-3| \leq 5$,

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 4-4x \leq 5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 2 \leq 5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ 4x-4 \leq 5 \end{cases}.$$

解得: $-\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{2} < x \leq \frac{9}{4}$

$$\therefore \text{不等式的解集为: } \left\{ -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{9}{4} \right\} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 若 $g(x) = \frac{1}{f(x)+m}$ 的定义域为 R , 则 $f(x)+m \neq 0$ 恒成立,

即 $f(x)+m=0$ 在 R 上无解.

$$\text{又 } f(x) = |2x-1| + |2x-3| \geq |2x-1-2x+3| = 2,$$

$$\therefore f(x) \text{ 最小值为 } 2, \quad \therefore m > -2. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$