

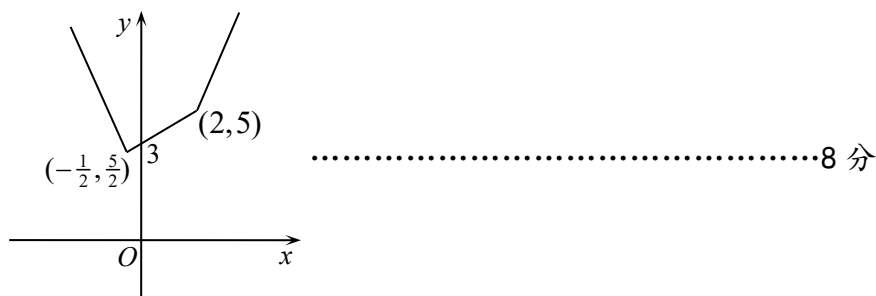
数学试卷答案高一

1-12. BBDBB CAACC AC

13. $3\sqrt{3}$ 14. $x < 0$ 或 $x > 1$ 15. 2 16. $[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$

17. (I) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & (x \geq 2) \\ x+3 & (-\frac{1}{2} < x < 2) \\ -3x+1 & (x \leq -\frac{1}{2}) \end{cases}$ 4 分

(II) 图像:



增区间 $[-\frac{1}{2}, +\infty)$;10 分

减区间 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$12 分

18. 设对甲产品投入为 x 万元, 则对乙产品的投入为 $3-x$ 万元,

并设效益为 y 万元, 则 $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\sqrt{3-x}$ 4 分

设 $t = \sqrt{3-x}$, 则 $t \in [0, \sqrt{3}]$,

这时 $y = -\frac{1}{4}(t - \frac{3}{2})^2 + \frac{21}{16}$ 6 分

$\therefore$ 当 $t = \frac{3}{2}$, 即 $x = 0.75$ 时, y 有最大值 $\frac{21}{16}$,8 分

这时 $3-x = 3-0.75 = 2.25$ 10 分

答: 对甲产品投入 0.75 万元, 对乙产品投入 2.25 万元时, 可获得最大效益.12 分

19. (I) 由单调性知 $2m^2 - m - 3 < 0$, $\therefore -1 < m < \frac{3}{2}$,2 分

又 $\because m \in N$, $\therefore m = 0$ 或 $m = 1$,

当 $m = 0$ 时, $2m^2 - m - 3 = -3$,

当 $m = 1$ 时, $2m^2 - m - 3 = -2$,

又 $\because$ 函数 $y = x^{2m^2 - m - 3}$ 为偶函数, $\therefore m = 1$4 分

(II) 原不等式为: $(a+1)^{-\frac{3}{5}} < (3a^2 - a)^{-\frac{3}{5}}$

$$\textcircled{1} \begin{cases} a+1 > 0 \\ 3a^2 - a > 0 \\ a+1 > 3a^2 - a \end{cases}, \text{解得: } -\frac{1}{3} < a < 0 \text{ 或 } \frac{1}{3} < a < 1; \text{6 分}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} a+1 < 0 \\ 3a^2 - a < 0 \\ a+1 > 3a^2 - a \end{cases}, \text{无解;8 分}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} a+1 < 0 \\ 3a^2 - a > 0 \end{cases}, \text{解得: } a < -1, \text{10 分}$$

$\therefore a$ 的取值范围是 $a < -1$ 或 $-\frac{1}{3} < a < 0$ 或 $\frac{1}{3} < a < 1$12 分

$$20. (I) g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2+4^x}{4^x} + \frac{4^{-x}+2}{4^{-x}} \right) - 1 = 4^x + 4^{-x} \text{2 分}$$

任取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$

$$\Delta y = g(x_2) - g(x_1) = 4^{x_2} + \frac{1}{4^{x_2}} - 4^{x_1} - \frac{1}{4^{x_1}}$$

$$= (4^{x_2} - 4^{x_1}) \left(1 - \frac{1}{4^{x_1+x_2}} \right) = \frac{(4^{x_2} - 4^{x_1})(4^{x_1+x_2} - 1)}{4^{x_1+x_2}} \text{6 分}$$

$\because x_2 > x_1$, $\therefore 4^{x_2} > 4^{x_1}$, $\because x_1 + x_2 > 0$, $\therefore 4^{x_1+x_2} - 1 > 0$,

又 $\because 4^{x_1+x_2} > 0$, $\therefore \Delta y > 0$

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数.8 分

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad f(\alpha) + f(1-\alpha) &= \frac{4^\alpha}{4^\alpha + 2} + \frac{4^{1-\alpha}}{4^{1-\alpha} + 2} = \frac{4^\alpha}{4^\alpha + 2} + \frac{4}{4 + 2 \cdot 4^\alpha} \\ &= \frac{4^\alpha + 2}{4^\alpha + 2} = 1 \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad \text{令 } S &= f\left(\frac{1}{2008}\right) + f\left(\frac{2}{2008}\right) + f\left(\frac{3}{2008}\right) + \dots + f\left(\frac{2007}{2008}\right) \\ S &= f\left(\frac{2007}{2008}\right) + f\left(\frac{2006}{2008}\right) + f\left(\frac{2005}{2008}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2008}\right) \\ \text{则 } 2S &= \left[f\left(\frac{1}{2008}\right) + f\left(\frac{2007}{2008}\right)\right] + \dots + \left[f\left(\frac{2007}{2008}\right) + f\left(\frac{1}{2008}\right)\right] = 2007 \\ &\therefore \\ f\left(\frac{1}{2008}\right) + f\left(\frac{2}{2008}\right) + f\left(\frac{3}{2008}\right) + \dots + f\left(\frac{2007}{2008}\right) &= \frac{2007}{2} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分} \end{aligned}$$

21. 若 $a = 0$, 函数 $f(x) = 2x - 3$ 在区间 $[-1, 1]$ 上没有零点,2 分

若 $a \neq 0$, 则分以下两种情况

①若函数 $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的唯一零点是不变号零点,

$$\text{则 } \Delta = 4 + 8a(a + 3) = 4(2a^2 + 6a + 1) = 0$$

$$\text{解得, } a = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$\text{当 } a = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \text{ 时, } f(0) = 0 \text{ 的重根是 } x = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \in [-1, 1],$$

$$\text{当 } a = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \text{ 时, } f(0) = 0 \text{ 的重根是 } x = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \notin [-1, 1], \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{当函数 } y = f(x) \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 上的零点是不变号零点时, } a = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \quad 6 \text{ 分}$$

②若函数 $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的唯一零点是变号零点,

则 $f(1) \cdot f(-1) \leq 0$, 即 $(a-5) \cdot (a-1) \leq 0$, 解得: $1 \leq a \leq 5$,8 分

当 $a=5$ 时, $f(x)=10x^2+2x-8$, 这时函数 $y=f(x)$ 的零点为 $1, \frac{4}{5}$,

在 $[-1,1]$ 上有两个根, 不符合题意, $\therefore a \neq 5$ 10 分

当 $a=1$ 时, $f(x)=2x^2+2x-4$, 这时函数 $y=f(x)$ 的零点为 $-1, 2$,

在 $[-1,1]$ 上有 1 个根, 符合题意, $\therefore a=1$ 满足

综上所述, $a = \frac{-3-\sqrt{7}}{2}$ 或 $1 \leq a < 5$ 12 分

22. (I) 由 $y=a^x$, 得 $x=\log_a y$, $\therefore f^{-1}(x)=\log_a x (x>0)$ 2 分

(II) $f^{-1}(x-a)+f^{-1}(x-3a)=\log_a(x-a)+\log_a(x-3a)$

$$=\log_a(x^2-4ax+3a^2) (x>3a)$$

$\because x \in [a+2, a+3]$ 且 $x>3a$

$\therefore a+2>3a$, 解得 $0<a<1$, 这时 $a+2>-\frac{4a}{2}$ 4 分

$\therefore$ 函数 $h(x)=x^2-4ax+3a^2$ 在区间 $[a+2, a+3]$ 上是增函数,

$\therefore g(x)=\log_a(x^2-4ax+3a^2)$ 在 $[a+2, a+3]$ 上是减函数,

$\therefore$ 在 $[a+2, a+3]$ 上, $g(x)_{\min}=g(a+3)=\log_a(9-6a)$,

$g(x)_{\max}=g(a+2)=\log_a(4-4a)$,8 分

由题意得: $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ \log_a(9-6a) \geq -1, \\ \log_a(4-4a) \leq 1 \end{cases}$ 10 分

解得, $0 < a \leq \frac{9-\sqrt{57}}{12}$ 12 分