

高二数学(文科)参考答案

一、选择题:

1.A 2.D 3.C 4.C 5.B 6.B 7.C 8.B 9.A 10.B 11.D 12.C

二、填空题:

13. 8 14. 18 15. $a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 6n-5 & (n \geq 2) \end{cases}$ 16. $m \leq 1$

三、解答题:

17. 解: (1) $a_2 = \frac{1}{3}S_1 = \frac{1}{3}$; $a_3 = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{9}$; $a_4 = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}) = \frac{16}{27}$ 2 分

当 $n \geq 2$ 时, $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}S_n \\ a_n = \frac{1}{3}S_{n-1} \end{cases}$ 做差得: $a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n$, 从第二项起成等比..... 4 分

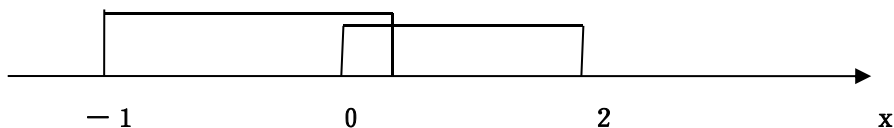
$\therefore a_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ \frac{1}{3} \cdot (\frac{4}{3})^{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$ 6 分

(2) $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = \frac{a_2[1 - ((\frac{4}{3})^2)^n]}{1 - (\frac{4}{3})^2} = \frac{3[(\frac{16}{9})^n - 1]}{7}$ 12 分

18. 解: (1) 当 $a=3$ 时, P 中 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 解得 $P = \{x | -1 < x < 3\}$ 3 分

此时 $Q = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ($Q \subseteq P$) $\wedge$ ($Q \neq P$) 6 分

(2) 若 $P \cap Q \neq \Phi$ 且 $P \cap Q \neq Q$ 如图:



a 的范围是: $0 < a \leq 2$

19. 解: (1) 由 $2^{10}S_{30} - (2^{10} + 1)S_{20} + S_{10} = 0$ 得 $2^{10}(S_{30} - S_{20}) = S_{20} - S_{10}$ 2 分

$$2^{10}(a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{30}) = a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{20}$$

$$2^{10}q^{10} = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2} \quad \text{.....4 分}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{.....6 分}$$

(2) $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, $nS_n = n - \frac{n}{2^n}$ 8 分

则数列 $\{nS_n\}$ 的前 n 项和为:

$$T_n = (1 + 2 + 3 + \dots + n) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n}\right)$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + n) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n}\right) \quad \text{.....10 分}$$

做差整理得 $T_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+2-2^{n+1}}{2^n}$ 12 分

20. 解: (1) 设获得利润为 y , 则

$$y = 50n - \left(98 + \frac{12 + 12 + (n-1) \cdot 4}{2} \cdot n\right) \quad \text{.....2 分}$$

$$\text{即 } y = 2(-n^2 + 20n - 49) > 0$$

$$\text{解得 } 10 - \sqrt{51} < n < 10 + \sqrt{51} \quad \text{.....4 分}$$

所以 $n = 3, 4, \dots, 17$, 从第三年开始获利6 分

(2) 方案一: 年平均利润为 $\frac{y}{n} = 40 - 2\left(n + \frac{49}{n}\right) \leq 40 - 4\sqrt{n \cdot \frac{49}{n}} = 12$ 万元8 分

当且仅当 $n = 7$ 时取等号 此时总收入为 $12 \times 7 + 26 = 110$ 万元

方案二: 总纯收入在 $n = 10$ 时最大,

$$\text{此时总收入为 } 2(-100 + 200 - 49) + 8 = 110 \text{ 万元} \quad \text{.....10 分}$$

总获利相同但是第一种方案时间短, 第一种更合算12 分

21. 解: (1) 由已知 $\frac{2b_n}{b_n S_n - S_n^2} = 1$ 当 $n \geq 2$ 时有

$$\frac{2(S_n - S_{n-1})}{(S_n - S_{n-1})S_n - S_n^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = \frac{1}{2} \quad \text{.....2 分}$$

得数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列. $\frac{1}{S_n} = \frac{n+1}{2}$

$$\text{于是 } b_1 = S_1 = 1, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时 } b_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{2}{n(n+1)} \quad \text{.....4 分}$$

$$\text{所以 } b_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ -\frac{2}{n(n+1)} & n \geq 2 \end{cases} \quad \text{.....6 分}$$

(2) 设每一行的公比都为 q ($q > 0$) 因为 $1+2+3+\cdots+12=78$ 所以表中第一行到第 12 行共

有 78 项, 故 a_{81} 在第 13 行第三项8 分

$$a_{81} = b_{13} \cdot q^2 = -\frac{2}{13 \times 14} = -\frac{4}{91} \Rightarrow q = 2 \quad \text{.....10 分}$$

记表中第 k 行所有项和为 S , 则 $S = \frac{b_k(1-2^k)}{1-2} = \frac{2(1-2^k)}{k(k+1)} \quad (k \geq 3) \quad \text{.....12 分}$

22. 解: (1) 由已知 $1 \leq f(1) \leq \frac{1^2+1}{1} = 1$

所以 $f(1) = 1 \quad \text{.....2 分}$

(2) 令 $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + c = 0 \\ f(1) = a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} - a \end{cases}$$

则 $f(x) = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - a \quad (a \neq 0) \quad \text{.....4 分}$

$f(x) \geq x$ 恒成立, 即: $ax^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - a \geq 0$ 恒成立

$$\therefore \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = \frac{1}{4} - 4(\frac{1}{2} - a)a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a - \frac{1}{4})^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \quad \text{.....8 分}$$

此时 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ 且 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{4} \leq \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{x^2 + 1 + x^2 + 1}{2}$ 恒成

立。 故 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{.....10 分}$

$$(3) \frac{1}{f(n)} = \frac{4}{(n+1)^2} > \frac{4}{(n+1)(n+2)} = 4\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \quad \text{.....12 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{f(i)} &= \sum_{i=1}^n \frac{4}{i(i+1)} > 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{2n}{n+2} \quad \text{.....14 分} \end{aligned}$$