公式法找数列通项公式

【公式法】 知 s_n 利用公式 $a_n=\begin{cases}s_1,n=1\\ S_n-S_{n-1},n\ge 2\end{cases}$.

例 1、已知下列两数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 s_n 的公式，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

（1）$S_n=n^3+n-1$.　　　　（2）$s_n=n^2-1$

答案：（1）$a_n=3n^2-3n+2$，（2）$a_n=\begin{cases}0 & (n=1)\\ 2n-1 & (n\ge 2)\end{cases}$ 点评：先分 n=1 和 $n\ge 2$ 两种情况，然后验证能否统一.

例 2、设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.已知 $a_1=1$，$\frac{2S_n}{n}=a_{n+1}-\frac{1}{3}n^2-n-\frac{2}{3}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求 a_2 的值；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解　(1)依题意，$2S_1=a_2-\frac{1}{3}-1-\frac{2}{3}$，

又 $S_1=a_1=1$，所以 $a_2=4$；

(2)由题意 $2S_n=na_{n+1}-\frac{1}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，

$2S_{n-1}=(n-1)a_n-\frac{1}{3}(n-1)^3-(n-1)^2-\frac{2}{3}(n-1)$

两式相减得 $2a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n-\frac{1}{3}(3n^2-3n+1)-(2n-1)-\frac{2}{3}$，

整理得 $(n+1)a_n-na_{n+1}=-n(n+1)$，

即 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=1$，又 $\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=1$，

故数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{1}=1$，公差为 1 的等差数列，

所以 $\frac{a_n}{n}=1+(n-1)\times 1=n$，所以 $a_n=n^2$.

练习 1．若 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=\frac{n}{n+1}$，则 $\frac{1}{a_5}=$(　　).

A.$\frac{5}{6}$　　B.$\frac{6}{5}$　　C.$\frac{1}{30}$　　D．30

解析 1： 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$，$\therefore \frac{1}{a_5}=5\times(5+1)=30$.

答案 D