

高三上学期期中考试数学（理）

一、选择题：共 12 题

1. 已知集合 $A = \{x|x^2 + x - 6 \leq 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x|\sqrt{x} \leq 4, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B =$

A. $(0,2)$

B. $[0,2]$

C. $\{0,2\}$

D. $\{0,1,2\}$

【答案】D

【解析】本题主要考查集合的基本运算. $A = \{x|-3 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x|0 \leq x \leq 16, x \in \mathbf{Z}\}$, 所以

$$A \cap B = \{0,1,2\}$$

2. 下列函数 $f(x)$ 中, 满足“对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ”的是

A. $f(x) = \frac{1}{x}$

B. $f(x) = x - \sin x$

C. $f(x) = e^x$

D. $f(x) = \ln(x+1)$

【答案】A

【解析】本题主要考查函数的单调性. 因为对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有

$f(x_1) > f(x_2)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 由幂函数的性质可知, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在

$(0, +\infty)$ 上是减函数; 由指数函数与对数函数的性质可知 $f(x) = e^x$ 与 $f(x) = \ln(x+1)$ 在

$(0, +\infty)$ 上是增函数; 易求 $f(x) = x - \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 故答案为 A.

3. 若 $a = 2^{\frac{\pi}{10}}$, $b = \log_{\pi} 3$, $c = \log_2 \sin \frac{\pi}{5}$, 则

A. $b > a > c$

B. $a > b > c$

C. $c > a > b$

D. $b > c > a$

【答案】B

【解析】本题主要考查对数函数与三角函数，考查了逻辑推理能力.

因为 $\sin \frac{\pi}{5} \in (0, 1)$, 所以由对数函数的性质可得

$$a = 2^{\frac{\pi}{10}} > 1, b = \log_{\pi} 3 \in (0, 1), c = \log_2 \sin \frac{\pi}{5} < 0, \text{ 所以 } a > b > c$$

4. 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2}$, $\alpha \in (0, \pi)$, 则 $\tan \alpha =$

A. -1

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 1

【答案】A

【解析】本题主要考查同角三角函数关系式、二倍角公式. 将 $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2}$ 两边平方可得

$$1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = 2, \text{ 所以 } \sin 2\alpha = -1, \text{ 又 } \alpha \in (0, \pi), \text{ 所以 } 2\alpha \in (0, 2\pi), \text{ 则 } \alpha = \frac{3\pi}{4}, \text{ 则 } \tan \alpha = -1.$$

5. 对任意的实数 x ,若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,则“ $-1 < x - y < 1$ ”是“ $[x] = [y]$ ”的

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】本题主要考查新定义问题、充分条件与必要条件,考查了逻辑推理能力.由题意,当 $[x] = [y]$ 时,则 $x, y \in [t, t+1) (t \in \mathbb{Z})$,则 $-1 < x - y < 1$,即必要性成立;令 $x=0.5, y=1.2$,则 $x - y = -0.7, -1 < x - y < 1$ 成立,但是 $[x] = 0, [y] = 1$,则 $[x] \neq [y]$,即充分性不成立,因此答案为B.

6. 已知角 θ 的顶点与原点重合,始边与 x 轴正半轴重合,终边在直线 $y = 2x$ 上,则 $\cos 2\theta$ 的值是

A. $-\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

【答案】C

【解析】本题主要考查任意角的三角函数、二倍角公式,考查了分析问题与解决问题的能力.

因为角 θ 的顶点与原点重合,始边与 x 轴正半轴重合,终边在直线 $y = 2x$ 上,所以 $\sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

则 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = -\frac{3}{5}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}, AB = \sqrt{2}, BC = 3$,则 $\sin \angle BAC =$

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【答案】D

【解析】本题主要考查正弦定理与余弦定理，考查了计算能力.由余弦定理可得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=5$,则 $AC=\sqrt{5}$,由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$,求解可得

$$\sin\angle BAC=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

8. 已知 $f(x), g(x)$ 分别是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数和奇函数,且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$,则 $f(1)+g(1)=$

A.-3

B.-1

C.1

D.3

【答案】C

【解析】本题主要考查函数的解析式、奇偶性和求函数的值,考查转化思想和方程思想.求解此题的关键是用“-x”代替“x”,得出 $f(x)+g(x)=-x^3+x^2+1$. 用“-x”代替“x”,得 $f(-x)-g(-x)=(-x)^3+(-x)^2+1$,化简得 $f(x)+g(x)=-x^3+x^2+1$,令 $x=1$,得 $f(1)+g(1)=1$,故选 C.

9. 已知命题 $p: \exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + ax_0 + a < 0$,若 $\neg p$ 是真命题,则实数 a 的取值范围是

A. $[0, 4]$ B. $(0, 4)$ C. $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ D. $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

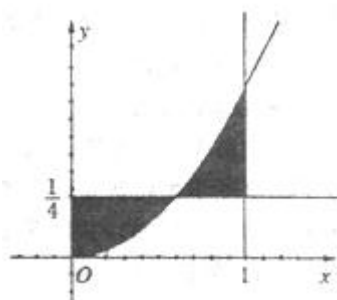
【答案】A

【解析】本题主要考查全称命题与特称命题的真假判断，考查了逻辑推理能力.

因为命题 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + ax_0 + a < 0$, 所以 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + ax + a \geq 0$ 是真命题, 则

$\Delta = a^2 - 4a \leq 0$, 所以 $0 \leq a \leq 4$, 故答案为 A.

10. 如图曲线 $y = x^2$ 和直线 $x = 0, x = 1, y = \frac{1}{4}$ 所围成的图形(如图所示)的面积为



A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

【答案】D

【解析】本题主要考查定积分、曲多边形的面积, 考查了计算能力. 由题意可得阴影部分的

$$\text{面积 } S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - x^2 \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) dx = \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4}$$

11. 若 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + m \ln x$ 在 $(1, +\infty)$ 是减函数, 则 m 的取值范围是

A. $[1, +\infty)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(-\infty, 1]$

D. $(-\infty, 1)$

【答案】C

【解析】本题主要考查导数与函数的性质，考查了恒成立问题与转化思想.

$f'(x) = -x + \frac{m}{x} \leq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立，即 $m \leq x^2$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立，又因为 $x^2 > 1$ ，所

以 $m \leq 1$ ，故答案为 C.

12. 对二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a 为非零整数), 四位同学分别给出下列结论, 其中有且只有一个结论是错误的, 则错误的结论是

A. -1 是 $f(x)$ 的零点

B. 1 是 $f(x)$ 的极值点

C. 3 是 $f(x)$ 的极值

D. 点 (2, 8) 在曲线 $y = f(x)$ 上

【答案】A

【解析】本题主要考查二次函数的零点、极值等, 意在考查考生的逻辑推理能力和运算求解能力.

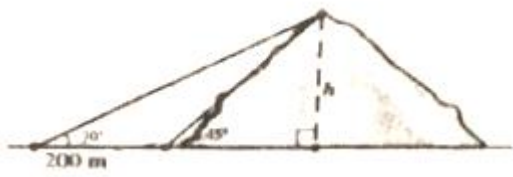
由 A 知 $a - b + c = 0$; 由 B 知 $f'(x) = 2ax + b, 2a + b = 0$; 由 C 知 $f'(x) = 2ax + b$, 令 $f'(x) = 0$ 可得 $x = -\frac{b}{2a}$, 则 $f(-\frac{b}{2a}) = 3$,

则 $\frac{4ac - b^2}{4a} = 3$; 由 D 知 $4a + 2b + c = 8$. 假设 A 选项错误, 则 $\begin{cases} a - b + c \neq 0 \\ 2a + b = 0 \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = 3 \\ 4a + 2b + c = 8 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} a = 5 \\ b = -10 \\ c = 8 \end{cases}$, 满足题意,

故 A 结论错误. 同理易知当 B 或 C 或 D 选项错误时不符合题意, 故选 A.

二、填空题：共 4 题

13. 如图, 勘探队员朝一座山行进, 在前后两处观察山顶的仰角是 30 度和 45 度, 两个观察点之间的距离是, 则此山的高度为 ____ (用根式表示).



【答案】 $100(\sqrt{3} + 1)$

【解析】 本题主要考查正弦定理与余弦定理，考查了分析问题与解决问题的能力.由题意可

得 $\frac{200}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}h}{\sin 135^\circ} \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ，求解可得 $h=100(\sqrt{3} + 1)$

14. 已知指数函数 $y = f(x)$, 对数函数 $y = g(x)$ 和幂函数 $y = h(x)$ 的图形都过 $P(\frac{1}{2}, 2)$, 如果

$f(x_1) = g(x_2) = h(x_3) = 4$, 那么 $x_1 + x_2 + x_3 =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 本题主要考查指数函数、对数函数与幂函数以及求值. 设

$f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, $g(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 和 $h(x) = x^a$, 因为这三个函数的图像都

过点 $P(\frac{1}{2}, 2)$, 求解可得 $f(x) = 4^x$, $g(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x (a > 0, a \neq 1)$ 和 $h(x) = x^{-1}$, 因为

$f(x_1) = g(x_2) = h(x_3) = 4$, 所以 $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{4}$, 所以 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{2}$

15. 将函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位后,得到的图象对应的函数 $f(x)$ 为奇函数,则 φ 的最小值为_____.

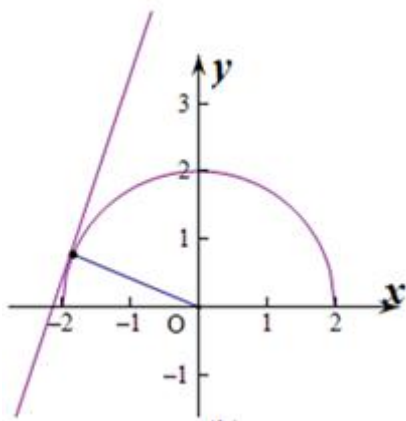
【答案】 $\frac{\pi}{6}$

【解析】 本题主要考查三角函数的图像与性质,考查了逻辑推理能力与计算能力.由题意可得 $f(x) = \sin(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{3})$,是奇函数,所以 $2\varphi - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$,则 $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$,因为 $\varphi > 0$,所以当 $k=0$ 时, φ 取得最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

16. 已知函数 $y = f(x) (x \in \mathbb{R})$,对函数 $y = g(x) (x \in I)$,定义 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 的“对称函数”为 $y = h(x) (x \in I)$, $y = h(x)$ 满足:对任意 $x \in I$,两个点 $(x, h(x)), (x, g(x))$ 关于点 $(x, f(x))$ 对称,若 $h(x)$ 是 $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ 关于 $f(x) = 3x+b$ 的“对称函数”,且 $h(x) > g(x)$ 恒成立,则实数 b 的取值范围是_____.

【答案】 $(2\sqrt{10}, +\infty)$

【解析】 本题主要考查新定义问题、函数的性质、直线与圆的位置关系、点到直线的距离公式,考查了逻辑推理能力与数形结合思想.根据“对称函数”的定义可知,
 $h(x) + \sqrt{4-x^2} = 2(3x+b)$,即 $h(x) = 2(3x+b) - \sqrt{4-x^2}$,若 $h(x) > g(x)$ 恒成立,则等价于 $2(3x+b) - \sqrt{4-x^2} > \sqrt{4-x^2}$,即 $3x+b > \sqrt{4-x^2}$ 恒成立, 设 $y = 3x+b, y = \sqrt{4-x^2}$,作出两个函数的图像如图所示,直线和上半圆相切时,圆心到直线的距离 $d = |-b| = 2$,即 $|b| = 2$,所以 $b = 2$ 或 $b = -2$ (舍去),即要使 $h(x) > g(x)$ 恒成立,则 $b > 2$,即实数 b 的取值范围是 $(2\sqrt{10}, +\infty)$.



三、解答题：共 7 题

17. 已知函数 $f(x) = 4\sin x \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$ 上的最大值及取得最大值时相应 x 的值.

【答案】

$$f(x) = 4\sin x (\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} = 2\sin x \cos x - 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3} = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$$

(1)

$$\text{所以 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$(2) \because -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \therefore -\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \leq 1, \therefore -1 \leq f(x) \leq 2$$

$$\therefore \text{当 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{12} \text{ 时, } f(x)_{\max} = 2$$

【解析】本题主要考查两角和与差公式、二倍角公式、三角函数的性质，考查了转化思想与计算能力.(1)化简 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$,由三角函数的性质求解即可；(2)由题意可得

$$-\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}, \text{ 结合正弦函数的性质求解即可.}$$

18. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,已知 $\cos C + (\cos A - \sqrt{3}\sin A)\cos B = 0$.

(1)求角 B 的大小.

(2)若 $a + c = 1$,求 b 的取值范围.

【答案】(1)由已知得: $\cos C + (\cos A - \sqrt{3}\sin A)\cos B = 0$,

$$\text{即有 } \sin A \sin B - \sqrt{3} \sin A \cos B = 0.$$

$$\because \sin A \neq 0, \therefore \sin B - \sqrt{3} \cos B = 0.$$

$$\text{又 } \because \cos B \neq 0, \therefore \tan B = \sqrt{3}.$$

$$\text{又 } \because 0 < B < \pi, \therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{由余弦定理: } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\because a+c=1, \cos B = \frac{1}{2}, \therefore b^2 = 3(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4},$$

$$\text{又} \because 0 < a < 1, \therefore \frac{1}{4} \leq b^2 < 1, \text{即} \frac{1}{2} \leq b < 1.$$

【解析】本题主要考查正弦定理与余弦定理、两角和与差公式，考查了转化思想与逻辑推理能力。(1)由 $\cos C = -\cos(A+B)$,展开化简可得 $\sin A \sin B - \sqrt{3} \sin A \cos B = 0$ ，由 $\sin A \neq 0$ ，再化简，即可求得结果；(2)利用余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，结合 $a+c=1$,可得

$$b^2 = 3(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}, \text{又} 0 < a < 1, \text{则结论易得.}$$

19. 已知函数 $f(x) = e^x(ax+b) - x^2 - 4x$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=4x+4$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并求 $f(x)$ 的极大值.

【答案】(I) $f'(x) = e^x(ax+a+b) - 2x - 4$.

由已知得 $f(0)=4, f'(0)=4$. 故 $b=4, a+b=8$.

从而 $a=4, b=4$.

(II) 由(I)知, $f(x) = 4e^x(x+1) - x^2 - 4x$,

$$f'(x) = 4e^x(x+2) - 2x - 4 = 4(x+2)(e^x - \frac{1}{2}).$$

令 $f'(x)=0$ 得, $x=-\ln 2$ 或 $x=-2$.

从而当 $x \in (-\infty, -2) \cup (-\ln 2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (-2, -\ln 2)$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2), (-\ln 2, +\infty)$ 单调递增, 在 $(-2, -\ln 2)$ 单调递减.

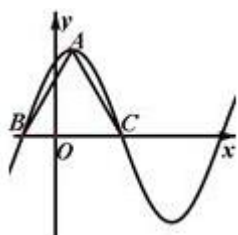
当 $x = -2$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值, 极大值为 $f(-2) = 4(1 - e^{-2})$.

【解析】 本题主要考查导数的基本知识, 利用导数判断函数单调性、求极值.

第(I)问求 a, b 两个未知量, 需要列两个方程, 注意到点 $(0, f(0))$ 既在函数 $f(x)$ 的图象上, 又在切线上, 切线的斜率就是导函数在切点处的值, 可列两个方程. 第(II)问在第(I)问的基础上求导, 判断导函数的正负, 然后求解. 本题是常规题, 求导正确是基础.

【备注】 【易错点拨】 利用导数求极值或最值问题, 书写要规范, 解答要清楚.

20. 函数 $f(x) = 3\cos\omega x + \sqrt{3}\sin\omega x (\omega > 0)$ 在一个周期内的图象如图所示, A 为图象的最高点, A 为图象与 x 轴的交点, 且 $\triangle ABC$ 为正三角形.



(1) 求函数 $f(x)$ 的值域及 ω 的值.

(2) 若 $f(x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{5}$, 且 $x_0 \in (-\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$, 求 $f(x_0 + 1)$ 的值.

【答案】 (1) 由已知可得 $f(x) = 3\cos\omega x + \sqrt{3}\sin\omega x = 2\sqrt{3}\sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$.

因为正三角形 $\triangle ABC$ 的高为 $2\sqrt{3}$, 所以 $BC = 4$,

则函数 $f(x)$ 的周期 $T=8$,所以 $\omega=\frac{\pi}{4}$.

$$(2)\because f(x_0)=\frac{8\sqrt{3}}{5},$$

$$\text{由(1)有:} f(x_0)=2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{3})=\frac{8\sqrt{3}}{5}$$

$$\therefore \sin(\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{3})=\frac{4}{5}\text{又}\because x_0\in(-\frac{10}{3},\frac{2}{3}),$$

$$\text{则}\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\therefore \cos(\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{3})=\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} f(x_0+1) &= 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right] = 2\sqrt{3}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right] \\ &= 2\sqrt{3}\left[\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{7\sqrt{6}}{5}. \end{aligned}$$

故

【解析】本题主要考查两角和与差公式、三角函数的性质与求值，考查了转化思想与逻辑推理能力.(1)化简 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$ ，易得函数的值域，由 $\triangle ABC$ 为正三角形，可得了周

期，即可求得 ω 值；(2)由题意可得 $\sin(\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{3})=\frac{4}{5}$ ，结合 x_0 的取值范围求出 $\cos(\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{3})$ ，

整理 $f(x_0+1)=2\sqrt{3}\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}x_0+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$ ，再利用两角和与差公式展开求解即可.

21. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=kx$, ($k\in\mathbf{R}$).

(1)证明:当 $x > 0$ 时, $f(x) < x$;

(2)证明:当 $k < 1$ 时,存在 $x_0 > 0$,使得对任意的 $x \in (0, x_0)$,恒有 $f(x) > g(x)$.

【答案】(1)令 $F(x) = f(x) - x = \ln(1+x) - x, x \in [0, +\infty)$,则有 $F'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{x+1}$

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $F'(x) < 0$,所以 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

故当 $x > 0$ 时, $F(x) < F(0) = 0$,即当 $x > 0$ 时 $f(x) < x$.

(2)令 $G(x) = f(x) - g(x) = \ln(1+x) - kx, x \in [0, +\infty)$,

则有 $G'(x) = \frac{1}{x+1} - k = \frac{-kx+(1-k)}{x+1}$

当 $k \leq 0$ 时, $G'(x) > 0$,故 $G(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, $G(x) > G(0) = 0$,

故对任意正实数 x_0 均满足题意

当 $0 < k < 1$ 时,令 $G'(x) = 0$,得 $x = \frac{1-k}{k} = \frac{1}{k} - 1 > 0$,取 $x_0 = \frac{1}{k} - 1$,对任意 $x \in (0, x_0)$,有

$G'(x) > 0$,从而 $G(x)$ 在 $[0, x_0)$ 单调递增,所以 $G(x) > G(0) = 0$,即 $f(x) > g(x)$.

综上,当 $k < 1$ 时,总存在 $x_0 > 0$,使得对任意 $x \in (0, x_0)$,恒有 $f(x) > g(x)$.

【解析】本题主要考查导数与函数的性质,考查了转化思想与分类讨论思想、逻辑推理能力与计算能力.(1) 令 $F(x) = f(x) - x, x \in [0, +\infty)$,求导并判断函数 $F(x)$ 的单调性, 求出函数

$F(x)$ 的最大值,即可证明结论;(2) 令 $G(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [0, +\infty)$,求导

$G'(x) = \frac{-kx+(1-k)}{x+1}$, 分 $k \leq 0$ 、 $0 < k < 1$ 两种情况讨论函数 $G(x)$ 的单调性,即可证明结论.

22. 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 1$,以极点为原点,极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标

系,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数).

(1)求直线 l 与曲线 C 的直角坐标方程.

(2)设曲线 C 经过伸缩变换 $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$ 得到曲线 C' ,设曲线 C' 上任一点为 $M(x, y)$,求 $x + 2\sqrt{3}y$ 的最小值.

【答案】(1)直线 l 的方程为: $\sqrt{3}x - y + 2 - \sqrt{3} = 0$,曲线 C 的直角坐标方程为: $x^2 + y^2 = 1$

(2)因为 $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$,所以 $\begin{cases} x = \frac{x'}{2} \\ y = y' \end{cases}$,代入 C 得 C' : $\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$

设椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数),

则 $x + 2\sqrt{3}y = 2\cos\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta = 4\sin(\theta + \frac{\pi}{6})$.

所以 $x + 2\sqrt{3}y$ 得最小值为 4.

【解析】本题主要考查参数方程与极坐标，考查了参直与极直互化、图像变换、三角函数.(1)

消去参数 t 可得直线 l 的普通方程；利用公式 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ 化简可得曲线 C 的直角坐标方程；

(2)由图像变换可得曲线 $C': \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，化为参数方程 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)，由题意可得

$x + 2\sqrt{3}y = 2\cos\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta$ ，化简易得结论.

23. 已知函数 $f(x) = |x - 1| + |x + 3| - m$ ($m \in \mathbf{R}$), 不等式 $f(x) < 5$ 的解集为 $(-4, 2)$.

(1)求 m 的值.

(2)实数 a, b, c 满足 $a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{9} = m$, 求证: $a + b + c \leq \sqrt{14}$.

【答案】(1)由函数、方程、不等式的关系可知 $x = -4$ 和 $x = 2$ 是方程 $f(x) = 5$ 的根,

所以 $f(-4) = 5$, 解得: $m = 1$

(2)由(1)知, $a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{9} = 1$,

所以 $(a + b + c)^2 = (1 \times a + 2 \times \frac{b}{2} + 3 \times \frac{c}{3})^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{9}) = 14$

所以: $a + b + c \leq \sqrt{14}$.

【解析】本题主要考查含绝对值不等式的解法、柯西不等式的应用，考查了逻辑推理能力与计算能力.(1)利用绝对值的几何意义求解即可；(2)化简

$(a + b + c)^2 = (1 \times a + 2 \times \frac{b}{2} + 3 \times \frac{c}{3})^2$, 再利用柯西不等式证明即可.