

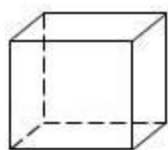
2016-2017 学年高二（上）12 月月考数学试卷

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

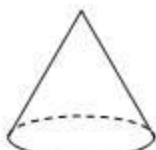
1. 方程 $x^2+y^2+2ax-by+c=0$ 表示圆心为 $C(2, 2)$ ，半径为 2 的圆，则 a, b, c 的值依次为（ ）

A. 2, 4, 4 B. -2, 4, 4 C. 2, -4, 4 D. 2, -4, -4

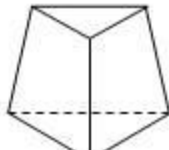
2. 下列几何体各自的三视图中，有且仅有两个视图相同的是（ ）



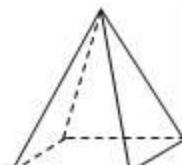
①正方体



②圆锥



③三棱台



④正四棱锥

A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ②④

3. 点 $(1, 1)$ 在圆 $(x-a)^2+(y+a)^2=4$ 的内部，则 a 的取值范围是（ ）

A. $-1 < a < 1$ B. $0 < a < 1$ C. $a < -1$ 或 $a > 1$ D. $a = \pm 1$

4. 直线 $y=x-1$ 上的点到圆 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ 上的点的最近距离为（ ）

A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $2\sqrt{2}-1$ D. 0

5. 给出下列四个命题：

(1) 平面内的一条直线与平面外的一条直线是异面直线；

(2) 若三个平面两两相交，则这三个平面把空间分成 7 部分；

(3) 用一个面去截棱锥，底面与截面之间的部分叫棱台；

(4) 一条直线与两条异面直线中的一条直线相交，那么它和另一条直线可能相交、平行或异面.

其中真命题的个数是（ ）

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 直线 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 得的劣弧所对的圆心角是（ ）

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

7. 若圆台的上、下底面半径的比为 3: 5，则它的中截面分圆台上下两部分面积之比为（ ）

A. 3: 5 B. 9: 25 C. 5: $\sqrt{41}$ D. 7: 9

8. 过原点的直线与圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是 ()

- A. $y=\sqrt{3}x$ B. $y=-\sqrt{3}x$ C. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ D. $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

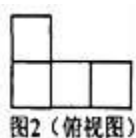
9. 圆锥的侧面展开图是直径为 a 的半圆面, 那么此圆锥的轴截面是 ()

- A. 等边三角形 B. 等腰直角三角形
C. 顶角为 30° 的等腰三角形 D. 其他等腰三角形

10. 已知 $M=\{(x, y) | y=\sqrt{9-x^2}, y \neq 0\}$, $N=\{(x, y) | y=x+b\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 $b \in$ ()

- A. $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ B. $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ C. $(-3, 3\sqrt{2}]$ D. $[-3, 3\sqrt{2}]$

11. 用若干个棱长为 1cm 的小正方体叠成一个几何体, 图 1 为其正视图, 图 2 为其俯视图, 若这个几何体的体积为 7cm^3 , 则其侧视图为 ()



- A. B. C. D.

12. 已知在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别是 AB, BB_1, B_1C_1 的中点, 则过这三点的截面图的形状是 ()

- A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形

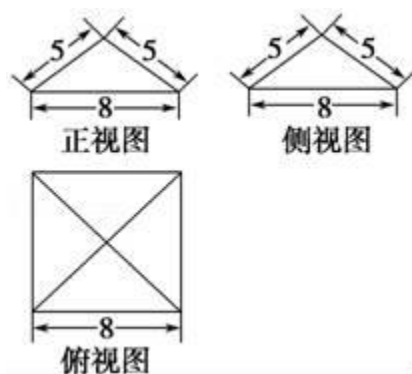
二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

13. 以点 $A(1, 4)$ 、 $B(3, -2)$ 为直径的两个端点的圆的方程为_____.

14. 已知一个正方形的直观图是一个平行四边形, 其中有一边长为 4 , 则此正方形的面积是_____.

15. 正四面体的内切球与外接球的体积之比_____.

16. 一个几何体的三视图如图所示, 那么此几何体的侧面积 (单位: cm^2) 为_____.

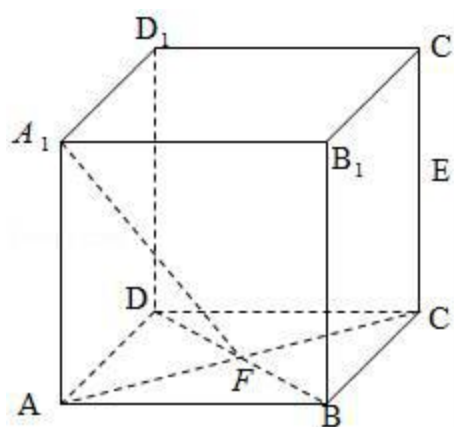


三、解答题：（本大题共 5 小题，第 17 题 8 分，第 18～21 题每题 10 分．）

17. 过圆 $x^2+y^2 - x+y - 2=0$ 和 $x^2+y^2=5$ 的交点，且圆心在直线 $3x+4y - 1=0$ 上的圆的方程为_____.

18. 过原点 O 作圆 $x^2+y^2 - 8x=0$ 的弦 OA ，延长 OA 到 N ，使 $|OA|=|AN|$ ，求点 N 的轨迹方程.

19. 如图：已知在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是 CC_1 的中点， F 是 AC ， BD 的交点．求 A_1F 与 B_1E 所成角的余弦值．



20. 圆 $(x+1)^2+y^2=8$ 内有一点 $P(-1, 2)$ ， AB 过点 P ，

①若弦长 $|AB|=2\sqrt{7}$ ，求直线 AB 的倾斜角；

②若圆上恰有三点到直线 AB 的距离等于 $\sqrt{2}$ ，求直线 AB 的方程．

21. 已知过点 $A(0, 1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ 相交于 M 、 N 两点

(1) 求实数 k 的取值范围；

(2) 求证： $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 为定值；

(3) 若 O 为坐标原点，且 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 12$ ，求直线 l 的方程．

2016-2017 学年高二（上）12 月月考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 方程 $x^2+y^2+2ax - by+c=0$ 表示圆心为 $C(2, 2)$ ，半径为 2 的圆，则 a, b, c 的值依次为（ ）

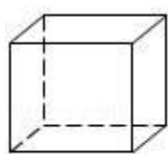
A. 2, 4, 4 B. -2, 4, 4 C. 2, -4, 4 D. 2, -4, -4

【考点】二元二次方程表示圆的条件.

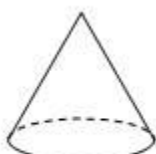
【分析】先根据方程求出用 a, b 和 c 表示的圆心坐标和圆的半径，再由题意代入对应的式子求出 a, b 和 c 的值.

【解答】解：由 $x^2+y^2+2ax - by+c=0$ 得，圆心坐标是 $(-a, \frac{b}{2})$ ，半径为 $r^2 = \frac{b^2}{4} + a^2 - c$ ，
因圆心为 $C(2, 2)$ ，半径为 2，解得 $a = -2, b = 4, c = 4$ ，
故选 B.

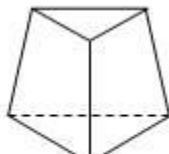
2. 下列几何体各自的三视图中，有且仅有两个视图相同的是（ ）



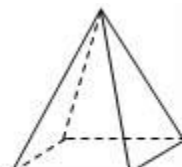
①正方体



②圆锥



③三棱台



④正四棱锥

A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ②④

【考点】简单空间图形的三视图.

【分析】利用三视图的作图法则，对选项判断，A 的三视图相同，圆锥，四棱锥的两个三视图相同，棱台都不相同，推出选项即可.

【解答】解：正方体的三视图都相同，而三棱台的三视图各不相同，圆锥和正四棱锥的，正视图和侧视图相同，
所以，正确答案为 D.

故选 D

3. 点 $(1, 1)$ 在圆 $(x - a)^2 + (y + a)^2 = 4$ 的内部, 则 a 的取值范围是 ()

A. $-1 < a < 1$ B. $0 < a < 1$ C. $a < -1$ 或 $a > 1$ D. $a = \pm 1$

【考点】点与圆的位置关系.

【分析】圆 $(x - a)^2 + (y + a)^2 = 4$ 表示平面上到圆心 $(a, -a)$ 的距离为 2 的所有点的集合, 如果点 $(1, 1)$ 在圆内, 则得到圆心与该点的距离小于半径, 列出关于 a 的不等式, 求出解集即可得到 a 的取值范围.

【解答】解: 因为点 $(1, 1)$ 在圆 $(x - a)^2 + (y + a)^2 = 4$ 的内部, 所以表示点 $(1, 1)$ 到圆心 $(a, -a)$ 的距离小于 2,

$$\text{即 } \sqrt{(1-a)^2 + (1-(-a))^2} < 2$$

$$\text{两边平方得: } (1-a)^2 + (a+1)^2 < 4,$$

$$\text{化简得 } a^2 < 1, \text{ 解得 } -1 < a < 1,$$

故选: A.

4. 直线 $y = x - 1$ 上的点到圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$ 上的点的最近距离为 ()

A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $2\sqrt{2} - 1$ D. 0

【考点】点到直线的距离公式; 圆的标准方程.

【分析】求出圆心和半径, 求圆心到直线的距离, 此距离减去半径即得所求的结果.

【解答】解: 由题设知圆心为 $C(-2, 1)$, 半径 $r = 1$,

$$\text{而圆心 } C(-2, 1) \text{ 到直线 } x - y - 1 = 0 \text{ 距离为 } d = \frac{|-2-1-1|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{因此, 圆上点到直线的最短距离为 } d - r = 2\sqrt{2} - 1,$$

故选 C.

5. 给出下列四个命题:

(1) 平面内的一条直线与平面外的一条直线是异面直线;

(2) 若三个平面两两相交, 则这三个平面把空间分成 7 部分;

(3) 用一个面去截棱锥, 底面与截面之间的部分叫棱台;

(4) 一条直线与两条异面直线中的一条直线相交, 那么它和另一条直线可能相交、平行或异面.

其中真命题的个数是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【考点】命题的真假判断与应用.

【分析】(1) 写出平面内的一条直线与平面外的一条直线的位置关系, 即可判定命题正误;

(2) 画出三个平面两两相交的情况, 即可判定命题的正误;

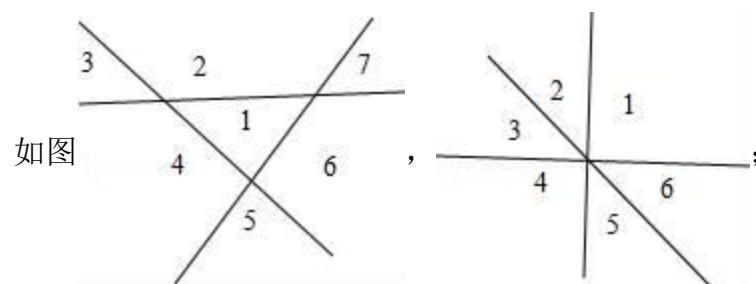
(3) 根据棱台的定义, 可以判定命题的正误;

(4) 举例说明命题是正确的.

【解答】解: (1) 平面内的一条直线与平面外的一条直线的位置关系是平行, 相交, 或异面;

∴命题 (1) 错误;

(2) 三个平面两两相交, 这三个平面可以把空间分成 6 或 7 部分,



∴命题 (2) 错误;

(3) 用一个平行于底面的平面去截棱锥, 底面与截面之间的部分叫做棱台;

∴命题 (3) 错误;

(4) 一条直线与两条异面直线中的一条直线相交,

那么它和另一条直线可能相交 (如两条异面直线的公垂线),

平行 (如作两条异面直线所成的角),

或异面 (如正方体中下底面的对角线与上底面的棱);

∴命题 (4) 正确;

所以, 以上真命题只有 1 个, 是 (4);

故选: B.

6. 直线 $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ 截圆 $x^2 + y^2 = 4$ 得的劣弧所对的圆心角是 ()

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【考点】直线和圆的方程的应用.

【分析】先求圆心到直线的距离，再求劣弧所对的圆心角.

【解答】解：圆心到直线的距离： $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

圆的半径是 2，劣弧所对的圆心角为 60°

故选 C.

7. 若圆台的上、下底面半径的比为 3: 5，则它的中截面分圆台上下两部分面积之比为 ()

A. 3: 5 B. 9: 25 C. 5: $\sqrt{41}$ D. 7: 9

【考点】棱柱、棱锥、棱台的侧面积和表面积.

【分析】中截面把圆台分为上、下两个圆台，则两个圆台的侧高相等，且中截面半径等于两底面半径和的一半，根据圆台的上、下底面半径的比为 3: 5，我们可以设，上底半径为 $3R$ ，下底半径为 $5R$ ，母线长为 $2L$ ，求出上、下两部分侧面积，即可得到答案. 点评：

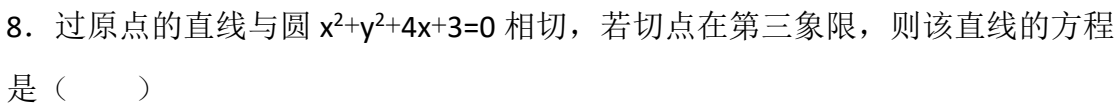
【解答】解：设上底半径为 $3R$ ，下底半径为 $5R$ ，母线长为 $2L$ ，
则中截面半径为 $4R$ ，分成的两个圆台的母线长均为 L ，

则 $S_{\text{上}} = \pi (4R + 3R) L$ ，

$S_{\text{下}} = \pi (4R + 5R) L$ ，

故分圆台上、下两部分侧面积的比为 7: 9.

故选：D，



- 【考点】**直线和圆的方程的应用.

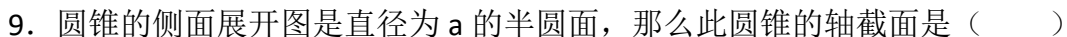
【分析】 画出图形，利用三角函数可以求直线的斜率，求出直线方程.

【解答】解：如图，圆方程为 $(x+2)^2+y^2=1^2$,

圆心为 A (- 2, 0), 半径为 1,

$$\sin \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选 C.



- A. 等边三角形 B. 等腰直角三角形
C. 顶角为 30° 的等腰三角形 D. 其他等腰三角形

【考点】旋转体（圆柱、圆锥、圆台）.

【分析】圆锥的母线长就是展开半圆的半径，根据这个条件就可以知道圆锥的母

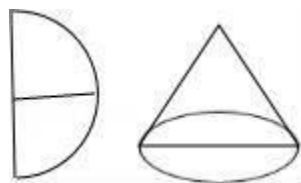
线长是圆锥底面圆半径的两倍，推出结论.

【解答】解：圆锥的母线长就是展开半圆的半径，半圆的弧长为 $a\pi$ 就是圆锥的底面周长，

所以圆锥的底面直径为 a ，

圆锥的轴截面是等边三角形.

故选 A



10. 已知 $M = \{(x, y) | y = \sqrt{9 - x^2}, y \neq 0\}$, $N = \{(x, y) | y = x + b\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 $b \in$ ()

A. $[-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$ B. $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ C. $(-3, 3\sqrt{2}]$ D. $[-3, 3\sqrt{2}]$

【考点】交集及其运算；元素与集合关系的判断.

【分析】先分析出 M 中的元素表示的是以 $(0, 0)$ 为圆心， $r=3$ 的上半圆， N 中的元素是一组平行线上的点，再画出对应图象，知道直线的临界值在相切以及 $y=x+3$ 之间，求出相切时对应的 b 即可求得结果.

【解答】解：由题得： M 中的元素表示的是以 $(0, 0)$ 为圆心， $r=3$ 的上半圆， N 中的元素是一组平行线上的点.

由 $M \cap N \neq \emptyset$ ，得直线与半圆有公共点，画出图形得

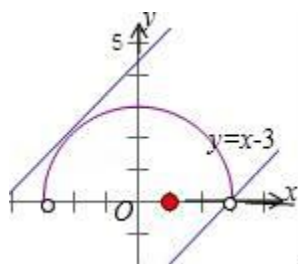
直线的临界值在与圆相切以及 $y=x-3$ 之间.

相切时，因为 $(0, 0)$ 到直线 $y=x+b$ 的距离

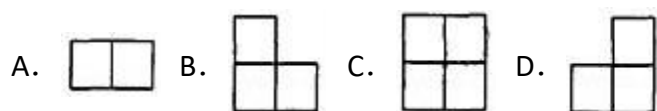
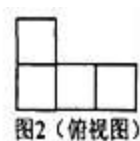
$$d = \frac{|0-0+b|}{\sqrt{1+1}} = 3 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}, \text{ 由图得取 } b = 3\sqrt{2}.$$

所以 $-3 < b \leq 3\sqrt{2}$.

故选：C.



11. 用若干个棱长为 1cm 的小正方体叠成一个几何体，图 1 为其正视图，图 2 为其俯视图，若这个几何体的体积为 7cm^3 ，则其侧视图为（ ）



【考点】简单空间图形的三视图.

【分析】通过几何体的体积，判断几何体中正方体的个数，排除选项 A、D；从俯视图正视图推出正确选项.

【解答】解：由这个几何体的体积为 7cm^3 可知共有 7 个小正方体.

通过俯视图可以排除选项 A、D，结合俯视图与主视图即可选出正确答案为 C（若左视图为 D，则只需要 6 个小正方体即可）.

故选 C.

12. 已知在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别是 AB， BB_1 ， B_1C_1 的中点，则过这三点的截面图的形状是（ ）

A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形

【考点】平面的基本性质及推论.

【分析】分别取 D_1C_1 、 D_1D 、AD 的中点 H、M、N，连结 GH、HM、MN，六边形 EFGHMN 是过 E，F，G 这三点的截面图.

【解答】解：分别取 D_1C_1 、 D_1D 、AD 的中点 H、M、N，

连结 GH、HM、MN，

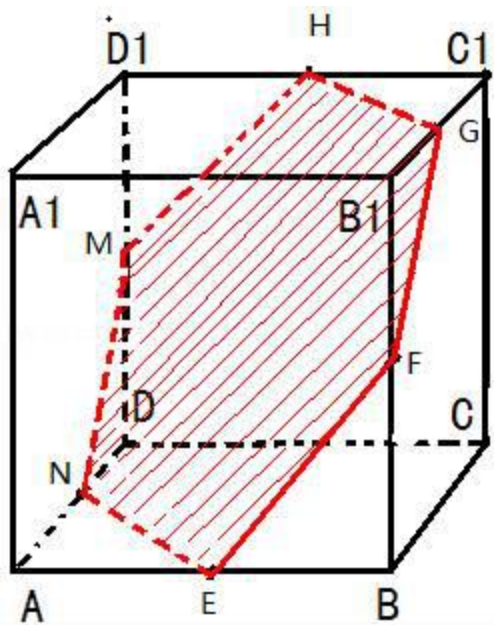
$\because$ 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别是 AB， BB_1 ， B_1C_1 的中点，

∴ $HG \parallel EN$, $HM \parallel EF$, $FG \parallel MN$,

∴ 六边形 EFGHMN 是过 E, F, G 这三点的截面图,

∴ 过这三点的截面图的形状是六边形.

故选: D.



二、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

13. 以点 A (1, 4)、B (3, -2) 为直径的两个端点的圆的方程为 $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

【考点】圆的标准方程.

【分析】根据中点坐标公式求出线段 AB 的中点坐标即为圆心的坐标, 然后根据两点间的距离公式求出圆心到 A 的距离即为圆的半径, 根据求出的圆心坐标和圆的半径写出圆的标准方程即可.

【解答】解: 设线段 AB 的中点为 O,

所以 O 的坐标为 $(\frac{1+3}{2}, \frac{4-2}{2})$, 即 (2, 1), 则所求圆的圆心坐标为 (2, 1);

由 $|AO| = \sqrt{(1-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$, 得到所求圆的半径为 $\sqrt{10}$,

所以所求圆的方程为: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$.

故答案为: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$

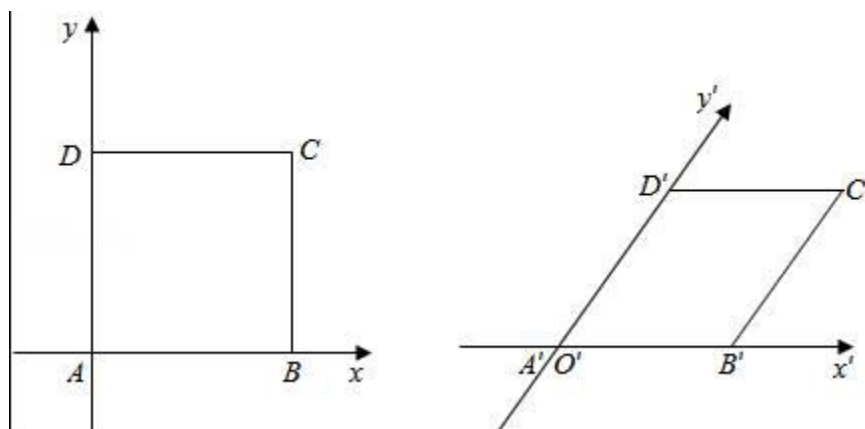
14. 已知一个正方形的直观图是一个平行四边形, 其中有一边长为 4, 则此正方

形的面积是 16 或 64 .

【考点】平面图形的直观图.

【分析】利用直观图的画法规则法两种情况即可求出.

【解答】解：如图所示：



①若直观图中平行四边形的边 $A'B'=4$,

则原正方形的边长 $AB=A'B'=4$, 故该正方形的面积 $S=4^2=16$.

②若直观图中平行四边形的边 $A'D'=4$,

则原正方形的边长 $AD=2A'D'=8$, 故该正方形的面积 $S=8^2=64$.

故答案为 16 或 64.

15. 正四面体的内切球与外接球的体积之比 1: 27 .

【考点】球内接多面体；球的体积和表面积.

【分析】画出图形，确定两个球的关系，通过正四面体的体积，求出两个球的半径的比值，即可求棱长为 a 的正四面体的内切球和外接球的体积之比.

【解答】解：设正四面体为 $PABC$ ，两球球心重合，设为 O .

设 PO 的延长线与底面 ABC 的交点为 D ，则 PD 为正四面体 $PABC$ 的高， $PD \perp$ 底面 ABC ，且 $PO=R$ ， $OD=r$ ， OD =正四面体 $PABC$ 内切球的高.

设正四面体 $PABC$ 底面面积为 S .

将球心 O 与四面体的 4 个顶点 $PABC$ 全部连接，

可以得到 4 个全等的正三棱锥，球心为顶点，以正四面体面为底面.

每个正三棱锥体积 $V_1=\frac{1}{3} \cdot S \cdot r$ 而正四面体 $PABC$ 体积 $V_2=\frac{1}{3} \cdot S \cdot (R+r)$

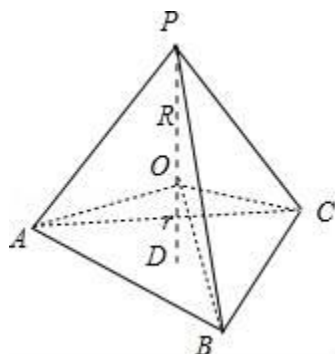
根据前面的分析， $4 \cdot V_1=V_2$,

所以, $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot S \cdot r = \frac{1}{3} \cdot S \cdot (R+r)$,

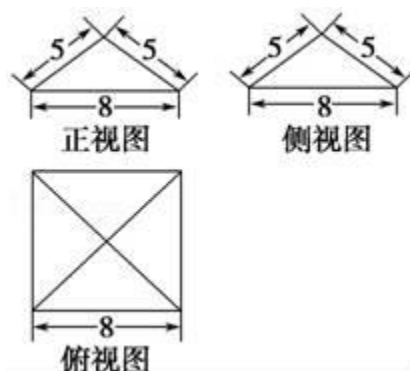
所以, $R=3r$,

所以棱长为 a 的正四面体的内切球和外接球的体积之比为 $1:27$.

故答案为 $1:27$.



16. 一个几何体的三视图如图所示, 那么此几何体的侧面积 (单位: cm^2) 为 80 cm^2 .



【考点】 由三视图求面积、体积.

【分析】 由三视图判断几何体的特征, 结合三视图的数据关系, 求出几何体的侧面积.

【解答】 解: 由三视图复原几何体可知, 此几何体为正四棱锥, 底面边长为 8, 侧面上的高为 5,

所以 $S_{\text{侧}} = 4 \times \frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 80 \text{cm}^2$.

故答案为: 80cm^2 .

三、解答题: (本大题共 5 小题, 第 17 题 8 分, 第 18~21 题每题 10 分.)

17. 过圆 $x^2+y^2 - x+y - 2=0$ 和 $x^2+y^2=5$ 的交点, 且圆心在直线 $3x+4y - 1=0$ 上的圆

的方程为 $x^2+y^2+2x-2y-11=0$.

【考点】圆与圆的位置关系及其判定.

【分析】根据题意可设所求圆的方程为 $x^2+y^2-x+y-2+\lambda(x^2+y^2-5)=0$ ($\lambda \neq -1$), 再求出圆心坐标为 $(\frac{1}{2(1+\lambda)}, -\frac{1}{2(1+\lambda)})$, 圆心在直线 $3x+4y-1=0$ 上, 所以将圆心的坐标代入中心方程可得 λ 的值, 进而求出圆的方程.

【解答】解: 设所求圆的方程为 $x^2+y^2-x+y-2+\lambda(x^2+y^2-5)=0$ ($\lambda \neq -1$), 即

$$x^2+y^2-\frac{2(1-\lambda)}{1+\lambda}x+\frac{2(5+\lambda)}{1+\lambda}y-\frac{8(3+\lambda)}{1+\lambda}=0$$

所以可知圆心坐标为 $(\frac{1}{2(1+\lambda)}, -\frac{1}{2(1+\lambda)})$,

因为圆心在直线 $3x+4y-1=0$ 上,

$$3 \times \frac{1}{2(1+\lambda)} - 4 \times \frac{1}{2(1+\lambda)} - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } \lambda = -\frac{3}{2}.$$

将 $\lambda = -\frac{3}{2}$ 代入所设方程并化简可得所求圆的方程为: $x^2+y^2+2x-2y-11=0$.

故答案为: $x^2+y^2+2x-2y-11=0$.

18. 过原点 O 作圆 $x^2+y^2-8x=0$ 的弦 OA, 延长 OA 到 N, 使 $|OA|=|AN|$, 求点 N 的轨迹方程.

【考点】轨迹方程.

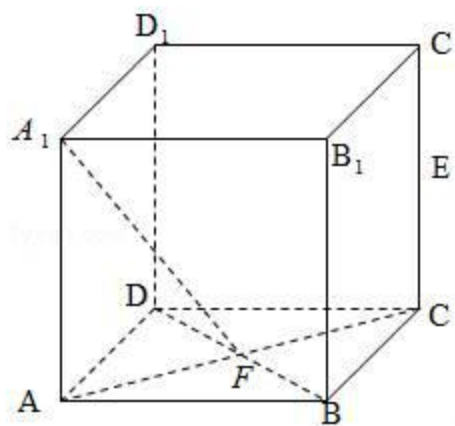
【分析】设 N (x, y), 延长 OA 到 N, 使 $|OA|=|AN|$, 可得 A $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. 由于点 A 在圆 $(x')^2+(y')^2-8x'=0$ 上, 即可得出.

【解答】解: 设 N (x, y), $\because$ 延长 OA 到 N, 使 $|OA|=|AN|$, $\therefore A(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$.

由于点 A 在圆 $(x')^2+(y')^2-8x'=0$ 上,

$$\therefore (\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{2})^2 - 8 \times \frac{x}{2} = 0, \text{ 化为: } x^2+y^2-16x=0, \text{ 即为点 N 的轨迹方程.}$$

19. 如图: 已知在正方体 ABCD - A₁B₁C₁D₁ 中, E 是 CC₁ 的中点, F 是 AC, BD 的交点. 求 A₁F 与 B₁E 所成角的余弦值.



【考点】异面直线及其所成的角.

【分析】如图所示, 建立空间直角坐标系. 利用 $\cos \langle \overrightarrow{FA_1}, \overrightarrow{EB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{FA_1} \cdot \overrightarrow{EB_1}}{|\overrightarrow{FA_1}| \cdot |\overrightarrow{EB_1}|}$

即可得出.

【解答】解: 如图所示, 建立空间直角坐标系.

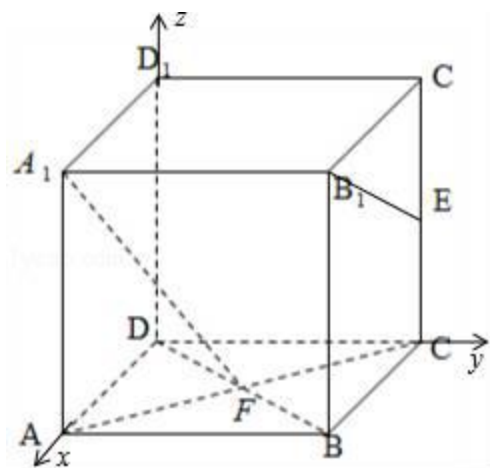
不妨设 $AB=2$, 则 $D(0, 0, 0)$, $A_1(2, 0, 2)$, $F(1, 1, 0)$,

$B_1(2, 2, 2)$, $E(0, 2, 1)$.

$\overrightarrow{FA_1} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{EB_1} = (2, 0, 1)$,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{FA_1}, \overrightarrow{EB_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{FA_1} \cdot \overrightarrow{EB_1}}{|\overrightarrow{FA_1}| \cdot |\overrightarrow{EB_1}|} = \frac{4}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{15},$$

$\therefore A_1F$ 与 B_1E 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$.



20. 圆 $(x+1)^2 + y^2 = 8$ 内有一点 $P(-1, 2)$, AB 过点 P ,

①若弦长 $|AB|=2\sqrt{7}$, 求直线 AB 的倾斜角;

②若圆上恰有三点到直线 AB 的距离等于 $\sqrt{2}$, 求直线 AB 的方程.

【考点】直线的一般式方程; 直线的倾斜角.

【分析】①由弦长公式求出圆心到直线 AB 的距离, 点斜式设出直线方程, 由点到直线的距离公式求出斜率, 再由斜率求倾斜角.

②由题意知, 圆心到直线 AB 的距离 $d=\sqrt{2}$, 由点到直线的距离公式求出斜率, 点斜式写出直线方程, 并化为一般式.

【解答】解: ①设圆心 $(-1, 0)$ 到直线 AB 的距离为 d , 则 $d=\sqrt{8-7}=1$, 设直线 AB 的倾斜角 α , 斜率为 k ,

则直线 AB 的方程 $y-2=k(x+1)$, 即 $kx-y+k+2=0$, $d=1=\frac{|-k+k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$,

$\therefore k=\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$,

$\therefore$ 直线 AB 的倾斜角 $\alpha=60^\circ$ 或 120° .

② $\because$ 圆上恰有三点到直线 AB 的距离等于 $\sqrt{2}$,

$\therefore$ 圆心 $(-1, 0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{r}{2}=\sqrt{2}$,

直线 AB 的方程 $y-2=k(x+1)$,

即 $kx-y+k+2=0$,

由 $d=\sqrt{2}=\frac{|-k+k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$,

解可得 $k=1$ 或 -1 ,

直线 AB 的方程 $x-y+3=0$ 或 $-x-y+1=0$.

21. 已知过点 A $(0, 1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 C: $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 相交于 M、N 两点

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 求证: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ 为定值;

(3) 若 O 为坐标原点, 且 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}=12$, 求直线 l 的方程.

【考点】直线与圆的位置关系.

【分析】(1) 由题意可得, 直线 l 的斜率存在, 用点斜式求得直线 l 的方程, 根

据圆心到直线的距离等于半径求得 k 的值, 可得满足条件的 k 的范围.

(2) 由题意可得, 经过点 M 、 N 、 A 的直线方程为 $y=kx+1$, 代入圆 C 的方程化简, 再利用一元二次方程根与系数的关系求得 x_1+x_2 和 $x_1 \cdot x_2$ 的值, 可得 $y_1 \cdot y_2 = (kx_1+1)(kx_2+1)$ 的值, 利用 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (x_1, y_1-1) \cdot (x_2, y_2-1) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 - (y_1+y_2) + 1$, 即可得出结论;

(3) 由 $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 12$, 解得 k 的值, 从而求得直线 l 的方程.

【解答】(1) 解: 由题意可得, 直线 l 的斜率存在,

设过点 $A(0, 1)$ 的直线方程: $y=kx+1$, 即: $kx - y + 1 = 0$

由已知可得圆 C 的圆心 C 的坐标 $(2, 3)$, 半径 $R=1$.

故由 $\frac{|2k-3+1|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$, 解得: $\frac{4-\sqrt{7}}{3} < k < \frac{4+\sqrt{7}}{3}$.

故当 $\frac{4-\sqrt{7}}{3} < k < \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 时, 过点 $A(0, 1)$ 的直线与圆 $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 相交于 M, N 两点.

(2) 证明: 由题意可得, 经过点 M 、 N 、 A 的直线方程为 $y=kx+1$, 代入圆 C 的方程 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$,

可得 $(1+k^2)x^2 - 4(k+1)x + 7 = 0$,

设 $M(x_1, y_1)$; $N(x_2, y_2)$, 则

$$x_1+x_2 = \frac{4(k+1)}{k^2+1}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{k^2+1},$$

$$\therefore y_1 \cdot y_2 = (kx_1+1)(kx_2+1) = \frac{12k^2+4k+1}{k^2+1},$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (x_1, y_1-1) \cdot (x_2, y_2-1) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 - (y_1+y_2) + 1 = \frac{7}{k^2+1} + \frac{12k^2+4k+1}{k^2+1}$$

$$- k \times \frac{4(k+1)}{k^2+1} - 2 + 1 = 7 \text{ 为定值};$$

(3) 解: 由 $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = \frac{12k^2+4k+8}{k^2+1} = 12$, 解得 $k=1$,

故直线 l 的方程为 $y=x+1$, 即 $x - y + 1 = 0$.

2017 年 5 月 15 日