

文 数

时间：120 分钟 总分：150 分

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、座位号填写在答题卡相应的位置。
3. 考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 < 0\}$, $B = \{x | -3 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$

()

- A. $(-3,3)$ B. $(-3,6)$ C. $(-1,3)$ D. $(-3,1)$

2. 若复数 z 满足 $(3-4i)z=|4+3i|$, 则 z 的共轭复数的虚部为

()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. -4 D. 4

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 4x+a, & x < 1 \\ 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 4$, 则实数 $a =$

()

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{2}{3}$ D. -2 或 $-\frac{2}{3}$

4. 已知 $\vec{a} = (2, m)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 若 $\vec{a} \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$, 则 m 的值是 ()

- A. -4 B. 2 C. 0 D. -2

5. 若 $\sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{3}$, 且 $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, 则 $\cos \alpha =$

()

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ 且 $b = \sqrt{3}a$, 则 $\triangle ABC$ 不可能是 ()

- A. 等腰三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 锐角三角形

7. 李冶 (1192--1279), 真定栾城 (今属河北石家庄市) 人, 金元时期的数学家、诗人, 晚年在封龙山隐居讲学, 数学著作多部, 其中《益古演段》主要研究平面图形问题: 求圆的直径、正方形的边长等. 其中一问: 现有正方形方田一块, 内部有一个圆形水池, 其中水池的边缘与方田四边之间的面积为 13.75 亩, 若方田的四边到水池的最近距离均为二十步, 则圆池直径和方田的边长分别是 (注: 240 平方步为 1 亩, 圆周率按 3 近似计算) ()

- A. 10 步, 50 步 B. 20 步, 60 步 C. 30 步, 70 步 D. 40 步, 80 步

8. 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $y = kx - 3$ 有公共点的一个充分不必要条件是 ()

- A. $k \leq -2\sqrt{2}$ 或 $k \geq 2\sqrt{2}$ B. $k \leq -2\sqrt{2}$

- C. $k \geq 2$ D. $k \leq -2\sqrt{2}$ 或 $k > 2$

9. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 $s =$ ()

- A. -1008 B. -1007
C. 1010 D. 1011

10. 如图是一个四面体的三视图, 这个三视图均是腰长为 2 的等腰直角三角形, 正视图和俯视图中的虚线是三角形的中线, 则该四面体的体积为

()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$
C. $\frac{8}{3}$ D. 2

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线

与该双曲线的左支交于 A, B 两点, AF_2, BF_2 分别交 y 轴于 P, Q 两点, 若 $\triangle PQF_2$ 的周长为

12, 则 ab 取得最大值时双曲线的离心率为

()

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = (2-a)(x-1) - 2\ln x$. 若函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上无零点, 则 ()

A. $a \in [2 - 4\ln 2, +\infty)$

B. $a \in (2 - 4\ln 2, +\infty)$

C. $a \in [4 - 2\ln 2, +\infty)$

D. $a \in (4 - 2\ln 2, +\infty)$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题

13. 某校为了解学生学习的情况, 采用分层抽样的方法从高一 2400 人、高二 2000 人、高三 n 人中, 抽取 90 人进行问卷调查. 已知高一被抽取的人数为 36, 那么高三被抽取的人数_____.

14. 若 $P(x, y)$ 满足 $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值为_____.

15. 设动直线 $x = a$ 与函数 $f(x) = 2\sin^2 x$ 和 $g(x) = \sqrt{3}\sin 2x$ 的图象分别交于 M 、 N 两点, 则 $|MN|$ 的最大值为_____.

16. 三棱锥 $S-ABC$ 中, 侧棱 $SA \perp$ 底面 ABC , $AB = 5$, $BC = 8$, $\angle B = 60^\circ$, $SA = 2\sqrt{5}$, 则该三棱锥的外接球的表面积为_____.

三、解答题

17. (本小题满分 12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足: $4S_n = a_n^2 + 2a_n - 3$, 其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (II) 设 $b_n = \frac{1}{a_n^2 - 1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

交强险是车主必须为机动车购买的险种, 若普通 6 座以下私家车投保交强险第一年的费用 (基准保费) 统一为 a 元, 在下一年续保时, 实行的是费率浮动机制, 保费与上一年度车辆发生道路交通事故的情况相联系, 发生交通事故的次数越多, 费率也就越高, 具体浮动情况如下表:

交强险浮动因素和浮动费率比率表		
	浮动因素	浮动比率

A_1	上一个年度未发生有责任道路交通事故	下浮 10%
A_2	上两个年度未发生有责任道路交通事故	下浮 20%
A_3	上三个及以上年度未发生有责任道路交通事故	下浮 30%
A_4	上一个年度发生一次有责任不涉及死亡的道路交通事故	0%
A_5	上一个年度发生两次及两次以上有责任道路交通事故	上浮 10%
A_6	上一个年度发生有责任道路交通死亡事故	上浮 30%

某机构为了研究某一品牌普通 6 座以下私家车的投保情况，随机抽取了 60 辆车龄已满三年的该品牌同型号私家车的下一年续保时的情况，统计得到了下面的表格：

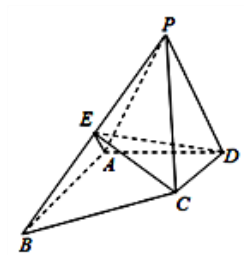
类型	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
数量	10	5	5	20	15	5

- (I) 求一辆普通 6 座以下私家车在第四年续保时保费高于基本保费的频率；
- (II) 某二手车销售商专门销售这一品牌的二手车，且将下一年的交强险保费高于基本保费的车辆记为事故车. 假设购进一辆事故车亏损 5000 元，一辆非事故车盈利 10000 元. 且各种投保类型车的频率与上述机构调查的频率一致，完成下列问题：
- ①若该销售商店内有六辆（车龄已满三年）该品牌二手车，某顾客欲在店内随机挑选两辆车，求这两辆车恰好有一辆为事故车的概率；
- ②若该销售商一次购进 120 辆（车龄已满三年）该品牌二手车，求一辆车盈利的平均值.

19. (本小题满分 12 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\triangle PAD$ 为正三角形， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2CD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $PA \perp CD$ ， E 、 F 为棱 PB 、 PA 的中点.

- (I) 求证：平面 $PAB \perp$ 平面 $EFDC$ ；
- (II) 若 $AD = 2$ ，直线 PC 与平面 PAD 所成角为 45° ，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且 $|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$, 点 $A\left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

的椭圆上的点.

(I) 求椭圆 C 标准的方程;

(II) 若 T 为椭圆 C 上异于顶点的任意一点, M, N 分别是椭圆 C 的上顶点和右顶点, 直线 TM 交 x 轴于 P , 直线 TN 交 y 轴于 Q , 证明 $|PN| \cdot |QM|$ 为定值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x \ln x - 1$, $g(x) = \frac{x}{e^x}$.

(I) 若 $g(x) = a$ 在 $(0, 2)$ 上有两个不等实根, 求实数 a 的取值范围;

(II) 证明: $f(x) + \frac{2}{eg(x)} > 0$.

选考部分: 共 10 分. 请考生在 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) (选修 4-4: 坐标系与参数方程)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ (t 为参数), 以 O 为极点,

x 轴的非负半轴为极轴, 曲线 C_2 的极坐标方程为: $\rho = \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

(I) 将曲线 C_1 的方程化为普通方程; 将曲线 C_2 的方程化为直角坐标方程;

(II) 若点 $P(1, 2)$, 曲线 C_1 与曲线 C_2 的交点为 A, B , 求 $|PA| + |PB|$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) (选修 4-5: 不等式选讲)

已知函数 $f(x) = |x - 7| - |x - 3|$.

(I) 作出函数 $f(x)$ 的图象;

(II) 当 $x < 5$ 时, 不等式 $|x - 8| - |x - a| > 2$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

姓名座位号

绝密 ★ 启用前

(在此卷上答题无效)

舒城中学 2018 届高三高考仿真试题 (一)

文科数学试题

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分.
2. 答题前, 考生务必将自己的姓名、座位号填写在答题卡相应的位置.
3. 考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回.

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 个小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 < 0\}$, $B = \{x | -3 < x < 3\}$, 则 $A \cap B = (C)$

A. $(-3, 3)$ B. $(-3, 6)$ C. $(-1, 3)$ D. $(-3, 1)$

2. 若复数 z 满足 $(3-4i)z = |4+3i|$, 则 z 的共轭复数的虚部为 (B)

A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. -4 D. 4

【答案】B

【解析】 $z = \frac{|4+3i|}{3-4i} = \frac{5(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4i}{5}$, $\therefore z$ 的共轭复数为 $\frac{3}{5} - \frac{4i}{5}$, 虚部为 $-\frac{4}{5}$ 故

选: B

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 4x+a, & x < 1 \\ 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 4$, 则实数 $a = (A)$

A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $-\frac{4}{3}$ 或 $-\frac{2}{3}$ D. -2 或 $-\frac{2}{3}$

4. 已知 $\vec{a} = (2, m)$, $\vec{b} = (1, -2)$, 若 $\vec{a} // (\vec{a} + 2\vec{b})$, 则 m 的值是 (A)

A. -4 B. 2 C. 0 D. -2

5. 若 $\sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{3}$, 且 $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, 则 $\cos \alpha = (B)$

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$ 且 $b=\sqrt{3}a$, 则 $\triangle ABC$ 不可能是(D)

- A. 等腰三角形 B. 钝角三角形
C. 直角三角形 D. 锐角三角形

[答案] D

[解析] 由 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 可得 $A = \frac{\pi}{6}$, 又由 $b = \sqrt{3}a$ 可得 $\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = 2\sin B = \sqrt{3}$, 可得 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $B = \frac{\pi}{3}$ 或 $B = \frac{2\pi}{3}$, 若 $B = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形; 若 $B = \frac{2\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{6} = A$, 则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形且为等腰三角形, 由此可知 $\triangle ABC$ 不可能为锐角三角形, 故应选 D.

7. 李冶(1192—1279), 真定栾城(今属河北石家庄市)人, 金元时期的数学家、诗人, 晚年在封龙山隐居讲学, 数学著作多部, 其中《益古演段》主要研究平面图形问题: 求圆的直径、正方形的边长等. 其中一问: 现有正方形方田一块, 内部有一个圆形水池, 其中水池的边缘与方田四边之间的面积为13.75亩, 若方田的四边到水池的最近距离均为二十步, 则圆池直径和方田的边长分别是(注: 240平方步为1亩, 圆周率按3近似计算)(B)

- A. 10步, 50步 **B. 20步, 60步** C. 30步, 70步 D. 40步, 80步

8. 圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=kx-3$ 有公共点的充分不必要条件是 (B)

- A. $k \leq -2\sqrt{2}$ 或 $k \geq 2\sqrt{2}$ B. $k \leq -2\sqrt{2}$
C. $k \geq 2$ D. $k \leq -2\sqrt{2}$ 或 $k > 2$

【答案】 B.

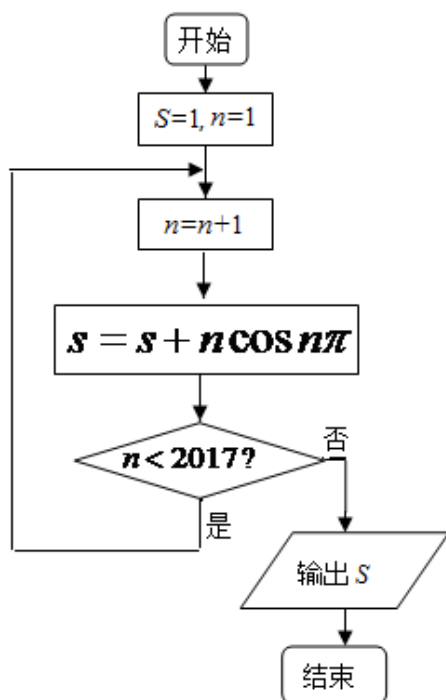
【解析】

试题分析: 圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=kx-3$ 有公共点, 则 $d = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2+k^2}} \leq 1$, 即 $k \geq 2\sqrt{2}$ 或 $k \leq -2\sqrt{2}$,

那么其充分不必要条件选 B.

考点: 1. 点到直线的距离; 2. 充分不必要条件.

9. 执行如图所示的程序框图, 则输出的 $s =$ (B)



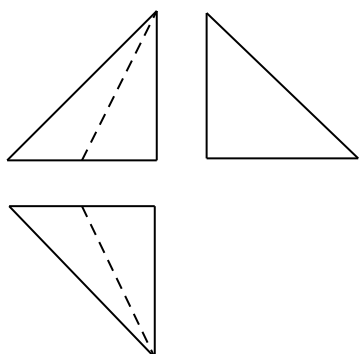
A. -1008

B. -1007

C. 1010

D. 1011

10.如图是一个四面体的三视图，这个三视图均是腰长为2的等腰直角三角形，正视图和俯视图中的虚线是三角形的中线，则该四面体的体积为（ A ）



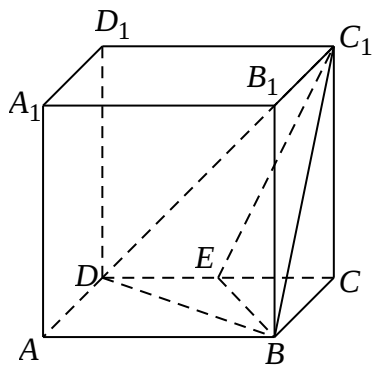
A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{8}{3}$

D. 2

【解答】由四面体的三视图得该四面体为棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中的三棱锥 C_1-BDE ，其中 E 是 CD 中点， $\triangle BDE$ 面积 $S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 1$ ，三棱锥 C_1-BDE 的高 $h = CC_1 = 2$ ， $\therefore$ 该四面体的体积： $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{2}{3}$ 。故选 A。



11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线

与该双曲线的左支交于 A, B 两点， AF_2, BF_2 分别交 y 轴于 P, Q 两点，若 $\triangle PQF_2$ 的周长为 12，

则 ab 取得最大值时双曲线的离心率为 (C)

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = (2-a)(x-1) - 2\ln x$. 若函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上无零点，则 (A)

- A. $a \in [2 - 4\ln 2, +\infty)$ B. $a \in [2 - 4\ln 2, +\infty)$ C. $a \in [2 - 4\ln 2, +\infty)$
D. $a \in [2 - 4\ln 2, +\infty)$

【解答】因为 $f(x) < 0$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上恒成立不可能，

故要使函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上无零点，只要对任意的 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ， $f(x) > 0$ 恒成立，

即对 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ， $a > 2 - \frac{2\ln x}{x-1}$ 恒成立.

令 $l(x) = 2 - \frac{2\ln x}{x-1}$ ， $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，则 $l'(x) = \frac{2\ln x + \frac{2}{x} - 2}{(x-1)^2}$ ，

再令 $m(x) = 2\ln x + \frac{2}{x} - 2$ ， $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ，则 $m'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{-2(1-x)}{x^2} < 0$ ，

故 $m(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上为减函数，于是 $m(x) > m\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln 2 > 0$ ，

从而 $l(x) > 0$ ，于是 $l(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上为增函数，所以 $l(x) < l\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 4\ln 2$ ，

故要使 $a > 2 - \frac{2\ln x}{x-1}$ 恒成立，只要 $a \in [2 - 4\ln 2, +\infty)$ ，

综上，若函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上无零点，则 a 的最小值为 $2 - 4\ln 2$.

第Ⅱ卷（非选择题 共 90 分）

二、填空题

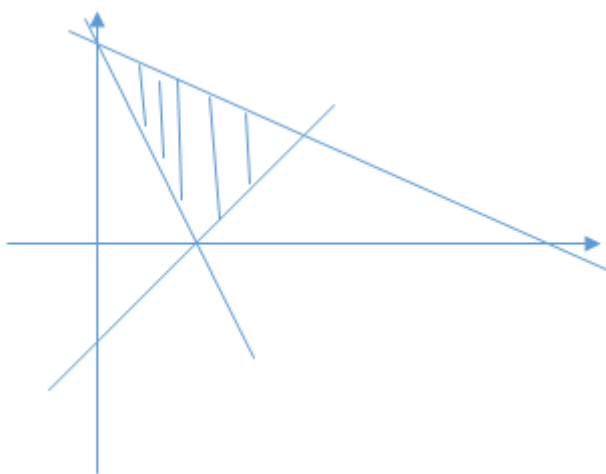
13. 某校为了解学生学习的情况，采用分层抽样的方法从高一 2400 人、高二 2000 人、高三 n 人中，抽取 90 人进行问卷调查. 已知高一被抽取的人数为 36，那么高三被抽取的人数为 24.

14. $P(x, y)$ 满足 $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - y - 1 \leq 0 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$ ，则 $x^2 + y^2$ 的最小值为 .

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】 作可行域，而 $x^2 + y^2 = OP^2$, P 为可行域内任一点，所以

$$OP^2 \geq d_{O-l:2x+y=2}^2 = \left(\frac{|2|}{\sqrt{2^2+1}} \right)^2 = \frac{4}{5}$$



点睛：线性规划问题，首先明确可行域对应的是封闭区域还是开放区域、分界线是实线还是虚线，其次确定目标函数的几何意义，是求直线的截距、两点间距离的平方、直线的斜率、还是点到直线的距离等等，最后结合图形确定目标函数最值取法、值域范围.

15. 设动直线 $x = a$ 与函数 $f(x) = 2\sin^2 x$ 和 $g(x) = \sqrt{3}\sin 2x$ 的图象分别交于 M 、 N 两点，则 $|MN|$ 的最大值为 3.

16. 三棱锥 $S-ABC$ 中，侧棱 $SA \perp$ 底面 ABC ， $AB=5$ ， $BC=8$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $SA=2\sqrt{5}$ ，则该三棱锥的外接球的表面积为（ ）

A. $\frac{64}{3}\pi$ B. $\frac{256}{3}\pi$ C. $\frac{436}{3}\pi$ D. $\frac{2048}{27}\sqrt{3}\pi$

【答案】B

【解析】由题，侧棱 $SA \perp$ 底面 ABC ， $AB=5$ ， $BC=8$ ， $\angle B=60^\circ$ ，则根据余弦定理可得

$$AC = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2}} = 7, \quad \triangle ABC \text{ 的外接圆圆心 } 2r = \frac{BC}{\sin B} = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \therefore r = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

三棱锥的外接球的球心到面 ABC 的距离 $d = \frac{1}{2}SA = \sqrt{5}$ ，则外接球的半径

$$R = \sqrt{\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{\frac{64}{3} + 5} = \sqrt{\frac{79}{3}}, \quad \text{则该三棱锥的外接球的表面积为 } S = 4\pi R^2 = \frac{316\pi}{3}$$

点睛：本题考查的知识点是球内接多面体，熟练掌握球的半径 R 公式是解答的关键。

三、解答题

17. （本小题满分 12 分）

17. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足： $4S_n = a_n^2 + 2a_n - 3$ ，其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n^2 - 1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

17. （本题满分 12 分）

解：（I）令 $n=1$ ，得 $4a_1 = a_1^2 + 2a_1 - 3$ ，且 $a_n > 0$ ，解得 $a_1 = 3$ 。

当 $n \geq 2$ 时， $4S_n - 4S_{n-1} = a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1}$ ，即 $4a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2a_n - 2a_{n-1}$ ，

整理得 $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) = 0$ ，Q $a_n > 0$ ， $\therefore a_n - a_{n-1} = 2$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列，

故 $a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n+1$ 。

（II）由（I）知： $b_n = \frac{1}{a_n^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 + 4n} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ ，

$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4n+4}$ 。

18.（本小题满分 12 分）

19. 交强险是车主必须为机动车购买的险种，若普通 6 座以下私家车投保交强险第一年的费用（基准保费）统一为 a 元，在下一年续保时，实行的是费率浮动机制，保费与上一年度车辆发生道路交通事故的情况相联系，发生交通事故的次数越多，费率也就越高，具体浮动情况如下表：

交强险浮动因素和浮动费率比率表		
	浮动因素	浮动比率
A_1	上一年度未发生有责任道路交通事故	下浮 10%
A_2	上两个年度未发生有责任道路交通事故	下浮 20%
A_3	上三个及以上年度未发生有责任道路交通事故	下浮 30%
A_4	上一年度发生一次有责任不涉及死亡的道路交通事故	0%
A_5	上一年度发生两次及两次以上有责任道路交通事故	上浮 10%
A_6	上一年度发生有责任道路交通死亡事故	上浮 30%

某机构为了研究某一品牌普通 6 座以下私家车的投保情况，随机抽取了 60 辆车龄已满三年的该品牌同型号私家车的下一年续保时的情况，统计得到了下面的表格：

类型	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
数量	10	5	5	20	15	5

- (1) 求一辆普通 6 座以下私家车在第四年续保时保费高于基本保费的频率；
- (2) 某二手车销售商专门销售这一品牌的二手车，且将下一年的交强险保费高于基本保费的车辆记为事故车. 假设购进一辆事故车亏损 5000 元，一辆非事故车盈利 10000 元. 且各种投保类型车的频率与上述机构调查的频率一致，完成下列问题：
- ①若该销售商店内有六辆（车龄已满三年）该品牌二手车，某顾客欲在店内随机挑选两辆车，求这两辆车恰好有一辆为事故车的概率；
- ②若该销售商一次购进 120 辆（车龄已满三年）该品牌二手车，求一辆车盈利的平均值.

19. 解：（I）一辆普通 6 座以下私家车第四年续保时保费高于基本保费的频率为 $\frac{15+5}{60} = \frac{1}{3}$.

（II）①由统计数据可知，该销售商店内的六辆该品牌车龄已满三年的二手车有两辆事故车，设为 b_1, b_2 ，四辆非事故车设为 a_1, a_2, a_3, a_4 . 从六辆车中随机挑选两辆车共有

$(b_1, b_2), (b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_1, a_3), (b_1, a_4), (b_2, a_1), (b_2, a_2), (b_2, a_3), (b_2, a_4), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4)$

总共 15 种情况.

其中两辆车恰好有一辆事故车共有 $(b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_1, a_3), (b_1, a_4), (b_2, a_1), (b_2, a_2), (b_2, a_3), (b_2, a_4)$ ，总共 8 种情况。所以该顾客在

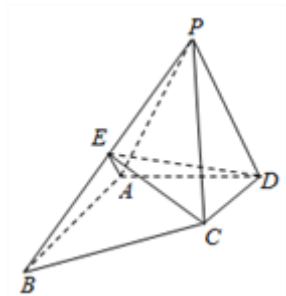
店内随机挑选的两辆车恰好有一辆事故车的概率为 $\frac{8}{15}$.

②由统计数据可知，该销售商一次购进 120 辆该品牌车龄已满三年的二手车有事故车 40 辆，非事故车 80 辆，

所以一辆车盈利的平均值为 $\frac{1}{120} [(-500) \times 40 + 10000 \times 80] = 5000$ 元.

19.（本小题满分 12 分）

33. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\triangle PAD$ 为正三角形， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2CD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $PA \perp CD$ ， E 、 F 为棱 PB 、 PA 的中点.



（1）求证：平面 $PAB \perp$ 平面 $EFDC$ ；

（2）若 $AD = 2$ ，直线 PC 与平面 PAD 所成角为 45° ，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

【答案】（1）见解析（2） $V_{\text{四棱锥}P-ABCD} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

【解析】试题分析：（1）取 AP 的中点 F ，连结 EF ， DF ，推导出四边形 $CDEF$ 为平行四边形，从而 $DF \parallel CE$ ，由此能证明平面 $PAB \perp$ 平面 CDE .（2）

$\angle CPD$ 为 PC 与平面 PAD 所成的角，即 $\angle CPD = 45^\circ$ ， $CD = AD = 2$ ，

$$V_{\text{四棱锥}P-ABCD} = \frac{1}{3} \times PO \times S_{\text{直角梯形}ABCD} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 8 = \frac{8\sqrt{3}}{3}。$$

解析：

(1) $\because E、F$ 分别为棱 $PB、PA$ 的中点

$\therefore EF \parallel \frac{1}{2}AB$ ，又 $CD \parallel \frac{1}{2}AB$ ， $\therefore CD \parallel EF$ ， $\therefore$ 四边形 $EFDC$ 为平行四边形，

$\therefore DF \parallel CE$ 。

又 $\triangle PAD$ 为正三角形，

$\therefore PA \perp DF$ ，

又 $PA \perp CD$ ，

$CD \cap CE = C$ ， $\therefore PA \perp$ 平面 $EFDC$ ，

又 $PA \subset$ 平面 PAB ，

$\therefore$ 平面 $PAB \perp$ 平面 $EFDC$ 。

(2) $AB \parallel CD, PA \perp CD \Rightarrow PA \perp AB$ ，又 $AB \perp AD, PA \cap AD = A, \therefore AB \perp$ 平面 PAD 。

$\therefore CD \perp$ 平面 $PAD \Rightarrow \angle CPD$ 为 PC 与平面 PAD 所成的角，即 $\angle CPD = 45^\circ \therefore CD = AD = 2$ ，

又 $\because AB = 2CD, \therefore AB = 4, \therefore S_{\text{直角梯形}ABCD} = \frac{1}{2} \times AD \times (CD + AB) = \frac{1}{2} \times 2 \times (2 + 4) = 8$

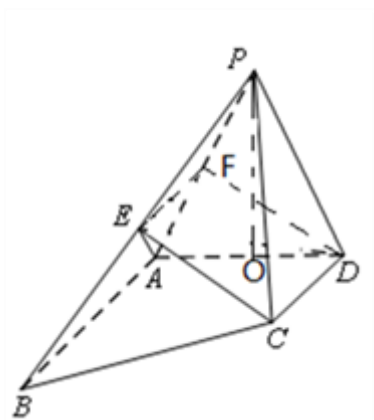
而 $\because AB \perp$ 平面 $PAD, AB \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，过 P 作 $PO \perp AD$ ，垂足为 O ，

得 $PO \perp$ 平面 $ABCD$

$\because \triangle PAD$ 为等边三角形， $\therefore PO = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$ ，

$\therefore V_{\text{四棱锥}P-ABCD} = \frac{1}{3} \times PO \times S_{\text{直角梯形}ABCD} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 8 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$



20. (本小题满分 12 分)

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且 $|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$, 点 $A\left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ 的椭圆上的点.

(1) 求椭圆 C 标准的方程;

(2) 若 T 为椭圆 C 上异于顶点的任意一点, M, N 分别是椭圆 C 的上顶点和右顶点, 直线 TM 交 x 轴于 P , 直线 TN 交 y 轴于 Q , 证明 $|PN| \cdot |QM|$ 为定值.

20. (1) 由已知 $c = 2\sqrt{3}$ 且 $F_1(-2\sqrt{3}, 0), F_2(2\sqrt{3}, 0)$

$$\begin{aligned}\therefore 2a &= |AF_1| + |AF_2| = \sqrt{(\sqrt{3} + 2\sqrt{3})^2 + \left(-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 + \left(-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{11}{2} + \frac{5}{2} = 8,\end{aligned}$$

$$\therefore a = 4, \text{ 从而 } b^2 = a^2 - c^2 = 4,$$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设 $T(x_0, y_0)$, 其中 $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ 且 $\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{4} = 1$,

$$\therefore x_0^2 + 4y_0^2 = 16, \quad M(0, 2), \quad N(4, 0),$$

$$\therefore \text{直线 } TM \text{ 的方程为 } \frac{y-2}{y_0-2} = \frac{x}{x_0},$$

$$\text{令 } y=0 \text{ 得 } P\left(\frac{-2x_0}{y_0-2}, 0\right),$$

$$\text{直线 } TN \text{ 的方程 } \frac{y}{y_0} = \frac{x-4}{x_0-4},$$

$$\text{令 } x=0 \text{ 得 } Q\left(0, \frac{-4y_0}{x_0-4}\right),$$

$$\text{则 } |PN| = \left|4 + \frac{2x_0}{y_0-2}\right| = \left|\frac{2x_0 + 4y_0 - 8}{y_0 - 2}\right|,$$

$$|QM| = \left|2 + \frac{4y_0}{x_0-4}\right| = \left|\frac{2x_0 + 4y_0 - 8}{x_0 - 4}\right|,$$

$$\begin{aligned}\therefore |PN| \cdot |QM| &= \frac{4(x_0 + 2y_0 - 4)^2}{(y_0 - 2)(x_0 - 4)} \\ &= \frac{4(x_0^2 + 4y_0^2 - 8x_0 - 16y_0 + 4x_0y_0 + 16)}{x_0y_0 - 2x_0 - 4y_0 + 8} = \frac{4(4x_0y_0 - 8x_0 - 16y_0 + 32)}{x_0y_0 - 2x_0 - 4y_0 + 8} \\ &= 16 \text{ 即 } |PN| \cdot |QM| \text{ 恒等于 } 16.\end{aligned}$$

20-3. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $l: y=2$ 上的点和椭圆上的点的距离的最小值为 1.

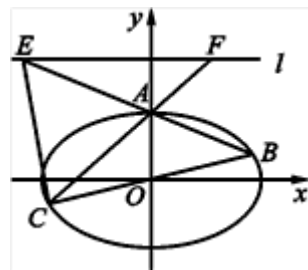
(I) 求椭圆的方程;

(II) 已知椭圆的上顶点为 A , 点 B, C 是 上的不同于 A 的两点, 且点 B, C 关于原点对称, 直线 AB, AC 分别交直线 l 于点 E, F . 记直线 AC 与 AB 的斜率分别为 k_1, k_2 .

① 求证: $k_1 \cdot k_2$ 为定值;

② 求 $\triangle CEF$ 的面积的最小值.

【解析】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$



(2) 直线 AC 的方程为 $y = k_1x + 1$, 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = k_1x + 1, \end{cases}$ 得 $(1 + 2k_1^2)x^2 + 4k_1x = 0$,

解得 $x_C = -\frac{4k_1}{2k_1^2 + 1}$, 同理 $x_B = -\frac{4k_2}{2k_2^2 + 1}$, 因为 B, O, C 三点共线, 则由

$$x_C + x_B = -\frac{4k_1}{2k_1^2 + 1} - \frac{4k_2}{2k_2^2 + 1} = 0,$$

整理得 $(k_1 + k_2)(2k_1k_2 + 1) = 0$, 所以 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{2}$.

② 直线 AC 的方程为 $y = k_1x + 1$, 直线 AB 的方程为 $y = k_2x + 1$, 不妨设 $k_1 > 0$, 则 $k_2 < 0$,

令 $y=2$, 得 $E\left(\frac{1}{k_2}, 2\right)$, $F\left(\frac{1}{k_1}, 2\right)$, 而 $y_C = k_1x_C + 1 = -\frac{4k_1^2}{2k_1^2 + 1} + 1 = \frac{-2k_1^2 + 1}{2k_1^2 + 1}$,

所以, $\triangle CEF$ 的面积 $S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \times |EF| \times (2 - y_C) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) \left(2 + \frac{2k_1^2 - 1}{2k_1^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_2 - k_1}{k_1k_2} \cdot \frac{6k_1^2 + 1}{2k_1^2 + 1}$.

由 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{2}$ 得 $k_2 = -\frac{1}{2k_1}$, 则 $S_{\triangle CEF} = \frac{2k_1^2+1}{2k_1} \cdot \frac{6k_1^2+1}{2k_1^2+1} = 3k_1 + \frac{1}{2k_1} \geq \sqrt{6}$, 当且仅当 $k_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 取

得等号, 所以 $\triangle CEF$ 的面积的最小值为 $\sqrt{6}$.

21. (本小题满分 12 分)

21. 已知函数 $f(x) = e^x \ln x - 1$, $g(x) = \frac{x}{e^x}$.

(I) 若 $g(x) = a$ 在 $(0, 2)$ 上有两个不等实根, 求实数 a 的取值范围;

(II) 证明: $f(x) + \frac{2}{eg(x)} > 0$.

21. 解: (I) 由题意知方程 $a = \frac{x}{e^x}$ 在 $(0, 2)$ 上有两个不等实根,

设 $g(x) = \frac{x}{e^x}$ ($x \in (0, 2)$), $g'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$.

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 2)$ 上单调递减,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上的最大值为 $g(1) = \frac{1}{e}$.

又 $g(0) = 0$, $g(2) = \frac{2}{e^2}$, 所以 a 的取值范围为 $(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e})$.

(II) $f(x) + \frac{2}{eg(x)} > 0$, 即 $e^x \ln x - 1 + \frac{2}{e} \cdot \frac{e^x}{x} > 0$, 等价于 $x \ln x > \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$,

设 $m(x) = x \ln x$, 则 $m'(x) = 1 + \ln x$,

所以当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减; 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$ 单调递增.

所以 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $m(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

设 $h(x) = \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$, 则 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值为 $h(1) = -\frac{1}{e}$.

因为 $m(x)_{\min} = h(x)_{\max}$ ，所以 $x \ln x > \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e}$ ，故 $f(x) + \frac{2}{eg(x)} > 0$ 。

选考部分:共 10 分。请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分)(选修 4-4: 坐标系与参数方程)

34. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \end{cases}$ (t 为参数)，以 O 为极点， x 轴

的非负半轴为极轴，曲线 C_2 的极坐标方程为： $\rho = \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$ 。

(I) 将曲线 C_1 的方程化为普通方程；将曲线 C_2 的方程化为直角坐标方程；

(II) 若点 $P(1,2)$ ，曲线 C_1 与曲线 C_2 的交点为 A 、 B ，求 $|PA|+|PB|$ 的值。

【答案】(I) $C_1: x+y-3=0, C_2: y^2=2x$ ；(II) $6\sqrt{2}$ 。

【解析】试题分析：(1)利用参数方程与普通方程之间的转化方法进行化简(2) 曲线 C_1 与曲线 C_2 的相交，法一和法二将参数方程代入曲线方程，利用两根之和计算出结果，法三利用普通方程计算求出结果

解析：(I) $C_1: x+y=3$ ，即： $x+y-3=0$ ；

$C_2: \rho^2 \sin^2\theta = 2\rho \cos\theta$ ，即： $y^2=2x$

(II) 方法一：

C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ 代入 $C_2: y^2=2x$ 得 $t^2+6\sqrt{2}t+4=0$

$\therefore t_1+t_2=-6\sqrt{2}$ ， $\therefore |PA|+|PB|=|t_1+t_2|=6\sqrt{2}$ 。

方法二：

把 $C_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \end{cases}$ 代入 $C_2: y^2=2x$ 得 $2t^2-6t+1=0$ 所以 $t_1+t_2=3$

$$\text{所以 } |PA|+|PB|=\sqrt{2^2+(-2)^2}|t_1+t_2|=6\sqrt{2}.$$

方法三:

把 $C_1: x+y=3$ 代入 $C_2: y^2=2x$ 得 $x^2-8x+9=0$

$$\text{所以 } x_1+x_2=8, \quad x_1x_2=9$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |PA|+|PB| &= \sqrt{1+1^2}|x_1-1|+\sqrt{1+1^2}|x_2-1| = \sqrt{2} \times (|x_1-1|+|x_2-1|) \\ &= \sqrt{2} \times (|x_1-1+x_2-1|) = \sqrt{2} \times (|8-2|) = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

23. (本小题满分 10 分) (选修 4-5: 不等式选讲)

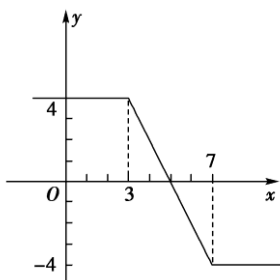
6 (1) 已知函数 $f(x)=|x-7|-|x-3|$.

(1) 作出函数 $f(x)$ 的图象;

(2) 当 $x<5$ 时, 不等式 $|x-8|-|x-a|>2$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

$$\text{[解析] } (1) \because f(x) = \begin{cases} 4, & (x \leq 3), \\ 10-2x, & (3 < x < 7), \\ -4 & (x \geq 7), \end{cases}$$

图象如图所示:



(2) $\because x<5, \therefore |x-8|-|x-a|>2$, 即 $8-x-|x-a|>2$,

即 $|x-a|<6-x$, 对 $x<5$ 恒成立.

即 $x-6<x-a<6-x$ 对 $x<5$ 恒成立,

$$\therefore \begin{cases} a<6, \\ a>2x-6. \end{cases} \text{ 对 } x<5 \text{ 恒成立.}$$

又 $\because x<5$ 时, $2x-6<4, \therefore 4 \leq a<6$.

$\therefore a$ 的取值范围为 $[4, 6)$.
