2016-2017学年高二（下）期末数学试卷（文科）

一.选择题

1．设全集U=R，集合M={x||x－$\frac{1}{2}$|$\leqslant\frac{5}{2}$}，P={x|－1≤x≤4}，则（$\complement_U$M）∩P等于（　　）

A．{x|－4≤x≤－2}　　B．{x|－1≤x≤3}　C．{x|3＜x≤4} D．{x|3≤x≤4}

2．若复数$z=\frac{2i}{1-i}$（i是虚数单位），则$\overline{z}$=（　　）

A．－1+i　 B．－1－i　C．1+i　D．1－i

3．若函数y=f（x）定义在[－1，2]上，且满足f（－$\frac{1}{2}$）＜f（1），则f（x）在区间[－1，2]上是（　　）

A．增函数　B．减函数

C．先减后增　　D．无法判断其单调性

4．设命题甲：关于x的不等式$x^2+2ax+4\leq 0$有解，命题乙：设函数f（x）=$\log_a$（x+a－2）在区间（1，+∞）上恒为正值，那么甲是乙的（　　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．设a=$\log_{0.8}0.9$，b=$\log_{1.1}0.9$，c=$1.1^{0.9}$，则a，b，c的大小关系为（　　）

A．b＜a＜c B．a＜c＜b C．a＜b＜c D．c＜a＜b

6．已知函数y=f（x）在定义域[－2，4]上是单调减函数，且f（a+1）＞f（2a），则a的取值范围是（　　）

A．1＜a≤2 B．－1＜a≤1　C．－3＜a≤3　D．a＜－$\frac{1}{3}$

7．设函数f（x）=$\begin{cases}x^2+bx+c, & x\leqslant 0\\ 2, & x>0\end{cases}$，若f（－4）=2，f（－2）=－2，则关于x的方程f（x）=x的解的个数为（　　）

A．1　 B．2　 C．3　 D．4

8．已知函数f（x）是定义在R上的偶函数，且在区间[0，+∞]上单调递增，若实数a满足f（$\log_2$a）+f（$\log_{\frac{1}{2}}a$）≤2f（1），则a的取值范围是（　　）

A．$[1,2]$ B．$(0,\frac{1}{2}]$ C．$(0,2]$ D．$[\frac{1}{2},2]$

二.填空题

9．已知 i 为虚数单位，若复数 $z=(m^2+2m-3)+(m-1)i$ 是纯虚数，则实数 m=________.

10．设全集 $U=\{x\in Z|-2\leqslant x\leqslant 4\}$，$A=\{-1,0,1,2,3\}$，若 $B\subseteq \complement_U A$，则集合 B 的个数是________.

11．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & (x\leqslant 2)\\ 2x & (x>2)\end{cases}$，若 $f(x_0)=8$，则 $x_0=$________.

12．设 f（x）是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2^x+2x+b$（b 为常数），则：$f(-1)=$________.

13．已知函数 $f(x)=ax^2-2ax+2+b$（$a\neq 0$）在$[2,3]$上有最大值 5 和最小值 2，则 a，b 的值为________.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_3 x|, & 0<x\leqslant 3\\ \frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{35}{8}, & x>3\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-m$ 存在 4 个不同的零点 x_1，x_2，x_3，x_4，则实数 m 的取值范围是________，$x_1\bullet x_2\bullet x_3\bullet x_4$ 的取值范围是________.

三.解答题

15．已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，集合 $B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$.

（1）若 $A\cap B=A\cup B$，求 a 的值；

（2）若 $\emptyset\subsetneq A\cap B$，$A\cap C=\emptyset$，求 a 的值.

16．已知关于 x 的函数 $y=(m+6)x^2+2(m-1)x+m+1$ 恒有零点.

（1）求 m 的范围；

（2）若函数有两个不同零点，且其倒数之和为 -4，求 m 的值.

17．已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$（a 为常数）.

（1）求函数 f（x）的单调递减区间；

（2）若 $f(x)$ 在区间$[-2，2]$上的最大值是 20，求 $f(x)$ 在该区间上的最小值．

18．已知函数 $f(x)=3^x$ 的定义域为 R，满足 $f(a+2)=18$，函数 $g(x)=\lambda\bullet 3^{ax}-4^x$ 的定义域为$[0，1]$．

（1）求实数 a 的值；

（2）若函数 $g(x)$ 为定义域上单调减函数，求实数λ的取值范围；

（3）λ为何值时，函数 $g(x)$ 的最大值为$\frac{1}{2}$.

19．已知函数 $f(x)=(a-\frac{1}{2})x^2+\ln x$（a 为实数）.

（1）当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 在区间$[\frac{1}{e}，e]$上的最大值和最小值；

（2）若对任意的 $x\in(1，+\infty)$，$g(x)=f(x)-2ax<0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2016-2017学年高二（下）期末数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一.选择题

1．设全集U=R，集合M={x||x - $\frac{1}{2}$|$\leqslant\frac{5}{2}$}，P={x| - 1≤x≤4}，则（C_UM）∩P等于（　　）

A．{x| - 4≤x≤ - 2}　　B．{x| - 1≤x≤3}　C．{x|3<x≤4} D．{x|3≤x≤4}

【考点】1H：交、并、补集的混合运算．

【分析】运用绝对值不等式的解法，化简集合M，再由补集和交集的定义，即可得到所求集合．

【解答】解：全集U=R，集合M={x||x - $\frac{1}{2}$|$\leqslant\frac{5}{2}$}={x| - $\frac{5}{2}$≤x - $\frac{1}{2}$≤$\frac{5}{2}$}={x| - 2≤x≤3}，

P={x| - 1≤x≤4}，

则（C_UM）∩P={x|x>3或x< - 2}∩{x| - 1≤x≤4}={x|3<x≤4}，

故选：C．

2．若复数$z=\frac{2i}{1-i}$（i是虚数单位），则$\overline{z}$=（　　）

A． - 1+i　B． - 1 - i　C．1+i　D．1 - i

【考点】A5：复数代数形式的乘除运算．

【分析】直接利用复数代数形式的乘除运算化简得答案．

【解答】解：∵ $z=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i(1+i)}{2}=-1+i$，

∴$\overline{z}=-1-i$．

故选：B．

3．若函数y=f（x）定义在[- 1，2]上，且满足f（ - $\frac{1}{2}$）<f（1），则f（x）在区间[- 1，2]上是（　　）

A．增函数 B．减函数

C．先减后增　　D．无法判断其单调性

【考点】3E：函数单调性的判断与证明．

【分析】根据单调性的定义，即可判断 f（x）在区间[－1，2]上的单调性．

【解答】解：由 $f(-\frac{1}{2})<f(1)$不能判断：

对任意的 x_1，$x_2\in[-1，2]$，f（x_1）与 f（x_2）的大小关系；

∴f（x）在区间[－1，2]上是无法判断其单调性的．

故选：D．

4．设命题甲：关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4\leqslant0$ 有解，命题乙：设函数 f（x）=$\log_a$（x+a－2）在区间（1，+∞）上恒为正值，那么甲是乙的（　　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【考点】2L：必要条件、充分条件与充要条件的判断．

【分析】先求出关于甲、乙成立的 a 的范围，结合充分必要条件的定义判断即可．

【解答】解：关于 x 的不等式 $x^2+2ax+4\leqslant0$ 有解，则判别式△≥0，

即 $4a^2-4\times4\geqslant0$，所以 $a^2-4\geqslant0$，解得 $a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant2$．即甲：$a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant2$．

函数 f（x）=$\log_a$（x+a－2）在区间（1，+∞）上恒为正值，

即$\begin{cases}a>1\\1+a-2\geqslant1\end{cases}$，解得：$a\geqslant2$，即乙：$a\geqslant2$

∴甲是乙的必要不充分条件，

故选：B．

5．设 $a=\log_{0.8}0.9$，$b=\log_{1.1}0.9$，$c=1.1^{0.9}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A．b＜a＜c B．a＜c＜b C．a＜b＜c D．c＜a＜b

【考点】4M：对数值大小的比较．

【分析】利用对数函数、指数函数的单调性直接求解．

【解答】解：∵$0=\log_{0.8}1<a=\log_{0.8}0.9<\log_{0.8}0.8=1$，

$b=\log_{1.1}0.9<\log_{1.1}1=0$，

$c=1.1^{0.9}>1.1^0=1$，

∴a，b，c 的大小关系为 $b<a<c$．

故选：A．

6．已知函数 $y=f(x)$ 在定义域 $[-2,4]$ 上是单调减函数，且 $f(a+1)>f(2a)$，则 a 的取值范围是（　　）

A．$1<a\leqslant 2$ B．$-1<a\leqslant 1$　C．$-3<a\leqslant 3$　D．$a<-\frac{1}{3}$

【考点】3F：函数单调性的性质．

【分析】由条件利用函数的单调性和定义域，列出不等式组，解不等式组求得 a 的取值范围．

【解答】解：∵函数 $y=f(x)$ 在定义域 $[-2,4]$ 上是单调减函数，且 $f(a+1)>f(2a)$，则 $\begin{cases}-2\leqslant a+1\leqslant 4\\ -2\leqslant 2a\leqslant 4\\ a+1<2a\end{cases}$，

求得 $1<a\leqslant 2$，

故选：A．

7．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c, & x\leqslant 0\\ 2, & x>0\end{cases}$，若 $f(-4)=2$，$f(-2)=-2$，则关于 x 的方程 $f(x)=x$ 的解的个数为（　　）

A．1　B．2　C．3　D．4

【考点】54：根的存在性及根的个数判断．

【分析】求出 $f(x)$ 的解析式，解方程 $f(x)=x$，根据解得个数得出结论．

【解答】解：∵$f(-4)=2$，$f(-2)=-2$，

∴$\begin{cases}16-4b+c=2\\ 4-2b+c=-2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=4\\ c=2\end{cases}$，

∴$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+2, & x\leqslant 0\\ 2, & x>0\end{cases}$，

令 $f(x)=x$ 得 $\begin{cases}x^2+4x+2=x\\ x\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\ x>0\end{cases}$，

解得 $x=-1$ 或 $x=-2$ 或 $x=2$．

∴f（x）=x 有 3 解，

故选 C.

8．已知函数 f（x）是定义在 R 上的偶函数，且在区间[0，+∞]上单调递增，若实数 a 满足 f（$\log_2 a$）+f（$\log_{\frac{1}{2}} a$）≤2f（1），则 a 的取值范围是（　　）

A．[1，2]　B．（0，$\frac{1}{2}$]　C．（0，2]　D．[$\frac{1}{2}$，2]

【考点】3N：奇偶性与单调性的综合．

【分析】根据题意，函数 f（x）在区间[0，+∞）单调递增且为偶函数，结合对数的运算性质可以将 f（$\log_2 a$）+f（$\log_{\frac{1}{2}} a$）≤2f（1）转化为|$\log_2 a$|≤1，解可得 a 的取值范围，即可得答案．

【解答】解：根据题意，函数 f（x）是定义在 R 上的偶函数，且 $\log_2 a=-\log_{\frac{1}{2}} a$，

则有 f（$\log_2 a$）=f（$\log_{\frac{1}{2}} a$）=f（|$\log_2 a$|），

f（$\log_2 a$）+f（$\log_{\frac{1}{2}} a$）≤2f（1）⇒f（$\log_2 a$）≤f（1）⇒f（|$\log_2 a$|）≤f（1），

又由函数 f（x）在区间[0，+∞）上单调递增，

则有|$\log_2 a$|≤1，

即有－1≤$\log_2 a$≤1，

解可得：$\frac{1}{2}$≤a≤2，即 a 的取值范围是[$\frac{1}{2}$，2]

故选：D．

二.填空题

9．已知 i 为虚数单位，若复数 z=（m^2+2m-3）+（m－1）i 是纯虚数，则实数 m=____－3____．

【考点】A5：复数代数形式的乘除运算．

【分析】利用纯虚数的定义直接求解．

【解答】解：∵复数 z=（m^2+2m-3）+（m－1）i 是纯虚数，

∴$\begin{cases} m^2+2m-3=0 \\ m-1\neq 0 \end{cases}$，

解得 m=﹣3.

故答案为：﹣3.

10．设全集 U={x∈Z|﹣2≤x≤4}，A={﹣1，0，1，2，3}，若 B⊆$\complement_U$A，则集合 B 的个数是__4__.

【考点】18：集合的包含关系判断及应用.

【分析】全集 U={x∈Z|﹣2≤x≤4}={﹣2，﹣1，0，1，2，3，4}，A={﹣1，0，1，2，3}，$\complement_U$A={﹣2，4}，Ly B⊆$\complement_U$A，即可得出满足条件的集合 B 的个数.

【解答】解：全集 U={x∈Z|﹣2≤x≤4}={﹣2，﹣1，0，1，2，3，4}，A={﹣1，0，1，2，3}，

$\complement_U$A={﹣2，4}，

∵B⊆$\complement_U$A，则集合 B=∅，{﹣2}，{4}，{﹣2，4}，

因此满足条件的集合 B 的个数是 4.

故答案为：4.

11．设函数 f（x）=$\begin{cases} x^2+2 & (x\leq 2) \\ 2x & (x>2) \end{cases}$，若 f（$x_0$）=8，则 x_0=__4 或 $-\sqrt{6}$__.

【考点】3B：分段函数的解析式求法及其图象的作法.

【分析】按照 $x_0\leq 2$ 与 $x_0>2$ 两种情况，分别得到关于 x_0 的方程，解之并结合大前提可得到方程的解，最后综合即可.

【解答】解：由题意，得

①当 $x_0\leq 2$ 时，有 $x_0^2+2=8$，解之得 $x_0=\pm\sqrt{6}$，

而 $\sqrt{6}>2$ 不符合，所以 $x_0=-\sqrt{6}$;

②当 $x_0>2$ 时，有 $2x_0=8$，解之得 $x_0=4$.

综上所述，得 $x_0=4$ 或 $-\sqrt{6}$.

故答案为：4 或 $-\sqrt{6}$.

12．设 f（x）是定义在 R 上的奇函数，当 x≥0 时，f（x）=2^x+2x+b（b 为常数），则：f（﹣1）=__﹣3__.

【考点】46：有理数指数幂的化简求值；3L：函数奇偶性的性质．

【分析】由 f（x）是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，f（x）$=2^x+2x+b$（b 为常数），知 f（0）=1+b=0，解得 b=﹣1 所以当 x＜0 时，f（x）$=-2^{-x}+2x+1$，由此能求出 f（﹣1）．

【解答】解：∵f（x）是定义在 R 上的奇函数，

当 $x\geqslant 0$ 时，f（x）$=2^x+2x+b$（b 为常数），

∴f（0）=1+b=0，

解得 b=﹣1

∴f（x）$=2^x+2x-1$．

当 x＜0 时，﹣f（x）$=2^{-x}+2(-x)-1$，

∴f（x）$=-2^{-x}+2x+1$，

∴f（﹣1）=﹣2﹣2+1=﹣3．

故答案为：﹣3．

13．已知函数 f（x）$=ax^2-2ax+2+b$（a≠0）在[2，3]上有最大值 5 和最小值 2，则 a，b 的值为 $\underline{\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}}$．

【考点】3W：二次函数的性质．

【分析】求出二次函数的对称轴，对 a 分 a＞0 和 a＜0 两类，判断出 f（x）在[2，3]上的单调性，求出函数的最值，列出方程组，求出 a，b 的值，

【解答】解：函数 f（x）$=ax^2-2ax+2+b$ 的对称轴是 x=1，

当 a＞0 时，

函数 f（x）在[2，3]上是增函数，

根据题意得

∴$\begin{cases}4a-4a+2+b=2\\9a-6a+2+b=5\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$，

当 a＜0 时，函数 f（x）在[2，3]上是减函数，

根据题意得$\begin{cases}4a-4a+2+b=5\\9a-6a+2+b=2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$，

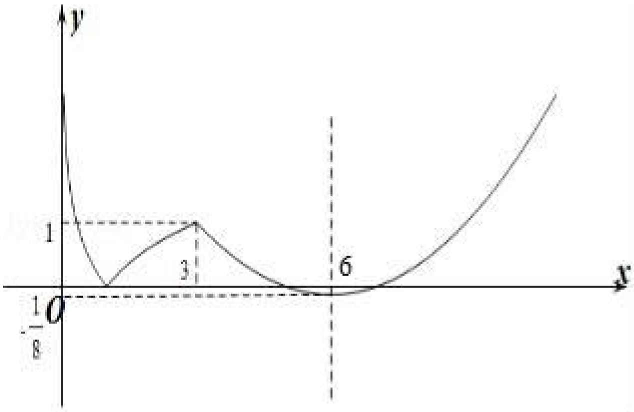
故答案为：$\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$．

14．已知函数 f（x）$=\begin{cases}|\log_3 x|, & 0<x\leqslant 3\\ \frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{35}{8}, & x>3\end{cases}$，若函数 g（x）=f（x）﹣m 存在 4 个不同的零点 x_1，x_2，x_3，x_4，则实数 m 的取值范围是＿（0，1）＿，$x_1\bullet x_2\bullet x_3\bullet x_4$ 的取值范围是＿（27，35）＿．

【考点】54：根的存在性及根的个数判断．

【分析】作出 f（x）的函数图象，根据图象得出 m 和各零点的范围，根据对数运算性质和二次函数的对称性得出 $x_1\bullet x_2\bullet x_3\bullet x_4$ 关于 x_3 的函数，从而求得 $x_1\bullet x_2\bullet x_3\bullet x_4$ 的最值．

【解答】解：作出 f（x）的函数图象如图所示：



由图象可知当 0＜m＜1 时，方程 f（x）=m 有 4 个解，

设 g（x）的 4 个零点从小到大为 $x_1<x_2<x_3<x_4$，

则 $x_1x_2=1$，$x_3+x_4=12$，且 $3<x_3<5$，

∴$x_1x_2x_3x_4=x_3x_4=x_3（12-x_3）=-x_3^2+12x_3$，

设 h（x）$=-x^2+12x$，x∈（3，5），则 h（x）在（3，5）上单调递增，

又 h（3）=27，h（5）=35，

∴27＜h（x）＜35．

即 $27<x_1x_2x_3x_4<35$．

故答案为：（0，1），（27，35）．

三.解答题

15．已知集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，集合 $B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$．

（1）若 $A\cap B=A\cup B$，求 a 的值；

（2）若 $\emptyset\subsetneq A\cap B$，$A\cap C=\emptyset$，求 a 的值．

【考点】1E：交集及其运算；1D：并集及其运算；1H：交、并、补集的混合运算．

【分析】（1）由 $A\cap B=A\cup B$，可知 A=B，由题意求出 B，用韦达定理求 a；

（2）由 $\emptyset\subsetneq A\cap B$，$A\cap C=\emptyset$，又∵$B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$；则 $3\in A$，$2\notin A$；解出 a 即可．

【解答】解：（1）∵集合 $B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，

又∵$A\cap B=A\cup B$，

∴集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}=\{2,3\}$，

则 2+3=a，

即 a=5．

（2）集合 $C=\{x|x^2+2x-8=0\}=\{-4,2\}$．

∵$\emptyset\subsetneq A\cap B$，$A\cap C=\emptyset$，

∴$3\in A$，$2\notin A$；

∴$9-3a+a^2-19=0$，$4-2a+a^2-19\neq0$；

解得，$a=-2$．

16．已知关于 x 的函数 $y=(m+6)x^2+2(m-1)x+m+1$ 恒有零点．

（1）求 m 的范围；

（2）若函数有两个不同零点，且其倒数之和为﹣4，求 m 的值．

【考点】51：函数的零点；3W：二次函数的性质．

【分析】（1）当 m+6=0 时，即 m=﹣6 时，满足条件．当 $m+6\neq0$ 时，由≥0 求得 $m\leqslant-\frac{5}{9}$且 $m\neq-6$．综合可得 m 的范围．

（2）设 x_1，x_2 是函数的两个零点，由条件并利用一元二次方程根与系数的关系求得 m 的值．

【解答】解：（1）当 m+6=0 时，m=﹣6，函数为 $y=-14x-5$ 显然有零点．

当 $m+6\neq0$ 时，$m\neq-6$，由 $\triangle=4(m-1)^2-4(m+6)(m+1)=-36m-20\geqslant0$，得 $m\leqslant-\frac{5}{9}$．

∴当 $m\leqslant -\frac{5}{9}$ 且 $m\neq -6$ 时，二次函数有零点.

综上可得，$m\leqslant -\frac{5}{9}$，即 m 的范围为 $(-\infty, -\frac{5}{9}]$.

（2）设 x_1，x_2 是函数的两个零点，则有 $x_1+x_2=-\frac{2(m-1)}{m+6}$，$x_1x_2=\frac{m+1}{m+6}$.

∵$\frac{1}{x1}+\frac{1}{x2}=-4$，即$\frac{x1+x2}{x1x2}=-4$，

∴ $-\frac{2(m-1)}{m+1}=-4$，解得 $m=-3$.

且当 $m=-3$ 时，$m+6\neq 0$，$\triangle>0$，符合题意，

∴m 的值为 -3.

17．已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$（a 为常数）.

（1）求函数 f（x）的单调递减区间；

（2）若 f（x）在区间$[-2, 2]$上的最大值是 20，求 f（x）在该区间上的最小值.

【考点】6E：利用导数求闭区间上函数的最值；6B：利用导数研究函数的单调性.

【分析】（1）出导数，令导数小于 0，解不等式求出函数的单调区间

（2）先求出端点的函数值 f（﹣2）与 f（2），比较 f（2）与 f（﹣2）的大小，然后根据函数 f（x）在$[-1, 2]$上单调递增，在$[-2, -1]$上单调递减，得到 f（2）和 f（﹣1）分别是 f（x）在区间$[-2, 2]$上的最大值和最小值，建立等式关系求出 a，从而求出函数 f（x）在区间$[-2, 2]$上的最小值.

【解答】解：（1）∵函数 f（x）的定义域为 R，$f'(x)=-3x^2+6x+9$.

令 $f'(x)<0$，解得 $x<-1$ 或 $x>3$，

所以函数 f（x）的单调递减区间为$(-\infty, -1)$，$(3, +\infty)$.

（2）∵$f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$，∴$f'(x)=-3x^2+6x+9\geqslant 0$，得 $x^2-2x-3\leqslant 0$，$-1\leqslant x\leqslant 3$，列表如下；

x	﹣2	（﹣2，﹣1）	﹣1	（﹣1，2）	2
f′（x）		﹣	0	+	
f（x）	a﹣14	递减	a﹣5	递增	a+22

∴$f(x)_{最大值}=f(2)=a+22$，∴$a+22=20$，∴$a=-2$，∴$f(x)_{最小值}=f(-1)=a-5=-7$

故函数的最小值是 - 7.

18．已知函数 f（x）$=3^x$ 的定义域为 R，满足 f（a+2）=18，函数 g（x）$=\lambda\bullet 3^{ax}-4^x$ 的定义域为[0，1].

（1）求实数 a 的值；

（2）若函数 g（x）为定义域上单调减函数，求实数λ的取值范围；

（3）λ为何值时，函数 g（x）的最大值为$\frac{1}{2}$.

【考点】3H：函数的最值及其几何意义.

【分析】（1）根据 f（a+2）=18 计算 a；

（2）设 $t=2^x$，根据复合函数的单调性得出 h（t）$=\lambda t-t^2$ 在[1，2]上单调递减，从而得出λ的范围；

（3）讨论对称轴与区间[1，2]的关系得出 h（t）的单调性，根据最大值为$\frac{1}{2}$计算λ.

【解答】解：（1）∵f（a+2）$=3^{a+2}=18$，∴$3^a=2$，即 $a=\log_3 2$.

（2）由（1）可知 g（x）$=\lambda\bullet 3^{(\log_3 2)x}-4^x=\lambda\bullet 2^x-4^x$，

设 $2^x=t$，$t\in[1，2]$，h（t）$=\lambda t-t^2$，

∵$t=2^x$ 是增函数，g（x）是减函数，

∴h（t）$=\lambda t-t^2$ 在[1，2]上是减函数，

∴$\frac{\lambda}{2}\leqslant 1$，即$\lambda\leqslant 2$.

（3）由（2）可知 h（t）$=-t^2+\lambda t$，$t\in[1，2]$的最大值为$\frac{1}{2}$，

①若$\frac{\lambda}{2}\geqslant 2$ 即$\lambda\geqslant 4$，则 h（t）在[1，2]上单调递增，

∴h（2）$=-4+2\lambda=\frac{1}{2}$，解得$\lambda=\frac{9}{4}$（舍）.

②若$\frac{\lambda}{2}\leqslant 1$ 即$\lambda\leqslant 2$ 时，则 h（t）在[1，2]上单调递减，

∴h（1）$=-1+\lambda=\frac{1}{2}$，解得$\lambda=\frac{3}{2}$.

③若 $1<\frac{\lambda}{2}<2$，即 $2<\lambda<4$，则 h（t）在[1，2]上先增后减，

∴h（$\frac{\lambda}{2}$）$=-\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^2}{2}=\frac{1}{2}$，解得$\lambda=\pm\sqrt{2}$（舍）.

综上，$\lambda=\frac{3}{2}$.

19．已知函数 $f(x)=(a-\frac{1}{2})x^2+\ln x$（a 为实数）.

（1）当 a=0 时，求函数 f（x）在区间$[\frac{1}{e}, e]$上的最大值和最小值；

（2）若对任意的 $x\in(1, +\infty)$，$g(x)=f(x)-2ax<0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【考点】6E：利用导数求闭区间上函数的最值；6B：利用导数研究函数的单调性.

【分析】（1）求出导数，由此能求出 f（x）在（0，1）上单调递增，在（1，+∞））上单调递减．f（x）在（$\frac{1}{e}$，1）上单调递增，在（1，e）上单调递减，由此能求出 f（x）在区间$[\frac{1}{e}, e]$上的最大值和最小值.

（2）求出函数 g（x）的导数，讨论①若 $a>\frac{1}{2}$，②若 $a\leq\frac{1}{2}$，求得单调区间，可得 g（x）的范围，由恒成立思想，进而得到 a 的范围.

【解答】解：（1）当 a=0 时，函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\ln x$，（x＞0）

$f'(x)=-x+\frac{1}{x}=\frac{1-x^2}{x}$，（x＞0），令 f′（x）=0，得 x=1，（负值舍去）

∴x＞0，x、f′（x），f（x）的变化如下：

x	$(\frac{1}{e}, 1)$	1	（1，e）
f′（x）	+	0	
f（x）	↑	极大值	↓

∴f（x）在（$\frac{1}{e}$，1）上单调递增，在（1，e）上单调递减，

f（x）最大值为 $f(1)=\frac{1}{2}$.

$\because f(\frac{1}{e})-f(e)=\frac{e^4-2e^2-1}{2e^2}>0$，∴f（x）最小值为 $f(e)=1-\frac{1}{2}e^2$

（2）$g(x)=f(x)-2ax=(a-\frac{1}{2})x^2+\ln x-2ax$，g（x）的定义域为（0，+∞），

$g'(x)=\frac{(x-1)[(2a-1)x-1]}{x}$

①若 $a>\frac{1}{2}$，令 g′（x）=0，得极值 $x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2a-1}$，

当 $x_1 < x_2$，即$\frac{1}{2} < a < 1$时，在（0，1）上有 g'（x）>0，

在（1，x_2）上有 g'（x）<0，

在（x_2，+∞）上有 g'（x）>0，此时 g（x）在区间（x_2，+∞）上是增函数，

并且在该区间上有 g（x）∈（g（x_2），+∞）不合题意；

当 $x_2 \leqslant x_1$，即 $a \geqslant 1$ 时，同理可知，g（x）在区间（1，+∞）上，

有 g（x）∈（g（1），+∞），也不合题意；

②若 $a \leqslant \frac{1}{2}$，则有 $x_1 > x_2$，此时在区间（1，+∞）上恒有 g'（x）<0，

从而 g（x）在区间（1，+∞）上是减函数；

要使 g（x）<0 在此区间上恒成立，只须满足 g（1）$= -a - \frac{1}{2} \leqslant 0$，得 $a \geqslant -\frac{1}{2}$

由此求得 a 的范围是$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

综合①②可知实数 a 的取值范围是$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$．

2017 年 8 月 10 日