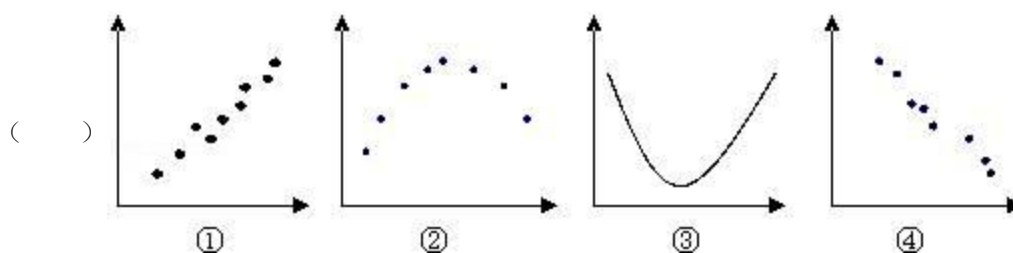


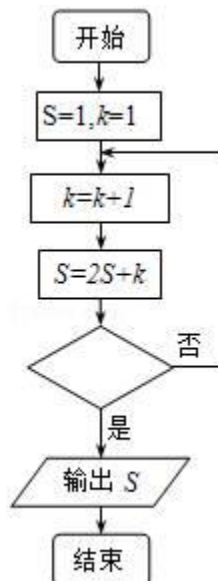
2015-2016 学年高二（上）期末数学试卷（理科）

一、选择题（每小题 5 分，共 70 分）

1. 一个年级有 12 个班，每个班的同学从 1 至 50 排学号，为了交流学习经验，要求每班学号为 14 的同学留下进行交流，这里运用的是（ ）
A. 系统抽样 B. 分层抽样 C. 抽签抽样 D. 随机抽样
2. 下列命题中的假命题是（ ）
A. $\exists x \in \mathbb{R}, \lg x = 0$ B. $\exists x \in \mathbb{R}, \tan x = 1$ C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 > 0$ D. $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$
3. “ $x^2 > 1$ ”是“ $x > 1$ ”的（ ）条件.
A. 充分不必要 B. 必要不充分
C. 充要 D. 既不充分也不必要
4. 下列四个图各反映了两个变量的某种关系，其中可以看作具有较强线性相关关系的是



- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ①②
5. 某程序框图如图所示，若输出的 $S=57$ ，则判断框内为（ ）

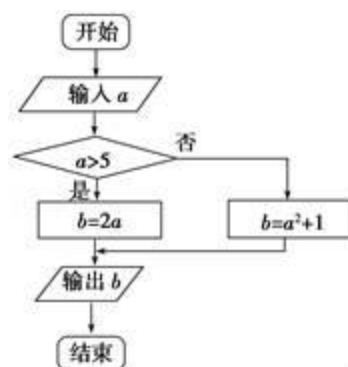


- A. $k > 4?$ B. $k > 5?$ C. $k > 6?$ D. $k > 7?$
6. 已知命题 p : “ $|x - 1| > 2$ ”，命题 q : “ $x \in \mathbb{Z}$ ”. 如果“ p 且 q ”与“非 q ”同时为假命题，则满足条件的 x 的取值范围为（ ）
A. $\{x | x \geq 3, \text{ 或 } x \leq -1, x \in \mathbb{Z}\}$ B. $\{x | -1 \leq x \leq 3, x \notin \mathbb{Z}\}$
C. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
7. 一枚硬币连掷三次至少出现一次正面的概率为（ ）
A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{3}$

8. 设 $\alpha \in [0, \pi]$, 则方程 $x^2 \sin \alpha + y^2 \cos \alpha = 1$ 不能表示的曲线为 ()
 A. 椭圆 B. 双曲线 C. 抛物线 D. 圆
9. 在样本频率分布直方图中, 共有 9 个小长方形, 若中间一个小长方形的面积等于它 8 个长方形的面积和的 $\frac{2}{5}$, 且样本容量为 140, 则中间一组的频数为 ()
 A. 28 B. 40 C. 56 D. 60
10. 有一个正方体棱长为 1, 点 A 为这个正方体的一个顶点, 在这个正方体内随机取一个点 P, 则点 P 到点 A 的距离大于 1 的概率为 ()
 A. $1 - \frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $1 - \frac{\pi}{3}$ D. $1 - \frac{\pi}{6}$
11. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点, 且与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 有相同的焦点, 则该椭圆的方程为 ()
 A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ D. $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$
12. 过双曲线的一个焦点 F_2 作垂直于实轴的直线, 交双曲线于 P、Q, F_1 是另一焦点, 若 $\angle PF_1Q = \frac{\pi}{2}$, 则双曲线的离心率 e 等于 ()
 A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} + 2$
13. 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB$, 则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于 ()
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$
14. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点, 点 O 是坐标原点, 若 $|AF| = 5$, 则 $\triangle AOB$ 的面积为 ()
 A. 5 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{17}{8}$

二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

15. 某学院的 A, B, C 三个专业共有 1200 名学生, 为了调查这些学生勤工俭学的情况, 拟采用分层抽样的方法抽取一个容量为 120 的样本. 已知该学院的 A 专业有 380 名学生, B 专业有 420 名学生, 则在该学院的 C 专业应抽取____名学生.
16. 观察程序框图如图所示. 若 $a = 5$, 则输出 $b =$ _____.



17. 如图是甲、乙两名篮球运动员 2013 年赛季每场比赛得分的茎叶图，则甲、乙两人比赛得分的中位数之和为_____.

甲		乙
7	1	2 6
2 8 2	2	1 9
6 4 5	3	1 2

18. 对于以下命题：

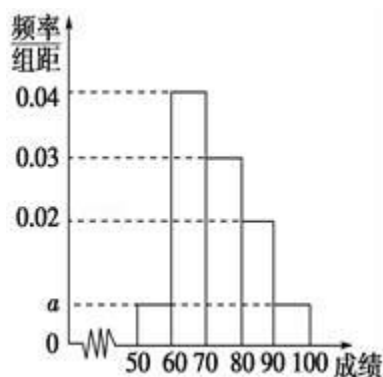
- ① $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ 是 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线的充要条件；
- ② 对空间任意一点 O 和不共线的三点 A、B、C，若 $\vec{OP} = 2\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}$ ，则 P、A、B、C 四点共面.
- ③ 如果 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ，那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角
- ④ 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 为空间一个基底，则 $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}\}$ 构成空间的另一个基底；
- ⑤ 若 $\vec{\pi} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ ， $\vec{n} = -2\vec{a} + 4\vec{b} - 6\vec{c}$ ，则 $\vec{\pi} \parallel \vec{n}$.

其中不正确结论的序号是_____.

三、解答题（每题 12 分，共 60 分）

19. 某校 100 名学生其中考试数学成绩的频率分布直方图如图所示，其中成绩分布区间是 $[50, 60)$ ， $[60, 70)$ ， $[70, 80)$ ， $[80, 90)$ ， $[90, 100]$.

- (1) 求图中 a 的值；
- (2) 根据频率分布直方图，估计这次 100 名学生数学成绩的平均数及中位数.



20. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右两个焦点, 点 $A(1, \frac{3}{2})$

在椭圆上, 且点 A 到 F_1, F_2 两点的距离之和等于 4.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 若 K 为椭圆 C 上的一点, 且 $\angle F_1KF_2 = 30^\circ$, 求 $\triangle F_1KF_2$ 的面积.

21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 实轴长为 2.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 求直线 $y = x + 1$ 被双曲线 C 截得的弦长.

22. 已知 $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3, 0)$,

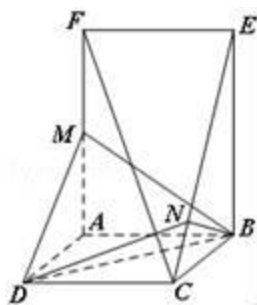
(1) 若 $k\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 互相垂直, 求实数 k 的值;

(2) 若 $\vec{c} = (x, 1, 1)$, 且 $|\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{5}$, 求实数 x 的值.

23. 已知如图几何体, 正方形 $ABCD$ 和矩形 $ABEF$ 所在平面互相垂直, $AF = 2AB = 2AD = 2$, M 为 AF 的中点, $BN \perp CE$, 垂足为 N .

(I) 求证: $CF \parallel$ 平面 BDM ;

(II) 求二面角 $M - BD - N$ 的大小.



2015-2016 学年贵州省铜仁市松桃民中高二（上）期末数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 5 分，共 70 分）

1. 一个年级有 12 个班，每个班的同学从 1 至 50 排学号，为了交流学习经验，要求每班学号为 14 的同学留下进行交流，这里运用的是（ ）

A. 系统抽样 B. 分层抽样 C. 抽签抽样 D. 随机抽样

【考点】系统抽样方法；收集数据的方法.

【分析】学生人数比较多，把每个班级学生从 1 到 50 号编排，要求每班编号为 14 的同学留下进行交流，这样选出的样本是具有相同的间隔的样本，是采用系统抽样的方法.

【解答】解：当总体容量 N 较大时，采用系统抽样. 将总体分段，分段的间隔要求相等，这时间隔一般为预先制定的，在第 1 段内采用简单随机抽样确定一个起始编号，在此编号的基础上加上分段间隔的整倍数即为抽样编号.

本题中，把每个班级学生从 1 到 50 号编排，

要求每班编号为 14 的同学留下进行交流，

这样选出的样本是采用系统抽样的方法，

故选 A.

2. 下列命题中的假命题是（ ）

A. $\exists x \in \mathbb{R}, \lg x = 0$ B. $\exists x \in \mathbb{R}, \tan x = 1$ C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 > 0$ D. $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$

【考点】命题的真假判断与应用.

【分析】A、B、C 可通过取特殊值法来判断；D、由指数函数的值域来判断.

【解答】解：A、 $x=1$ 成立；B、 $x=\frac{\pi}{4}$ 成立；D、由指数函数的值域来判断. 对于 C 选项 $x=-1$ 时， $(-1)^3 = -1 < 0$ ，不正确.

故选 C

3. “ $x^2 > 1$ ”是“ $x > 1$ ”的（ ）条件.

A. 充分不必要 B. 必要不充分

C. 充要 D. 既不充分也不必要

【考点】必要条件、充分条件与充要条件的判断.

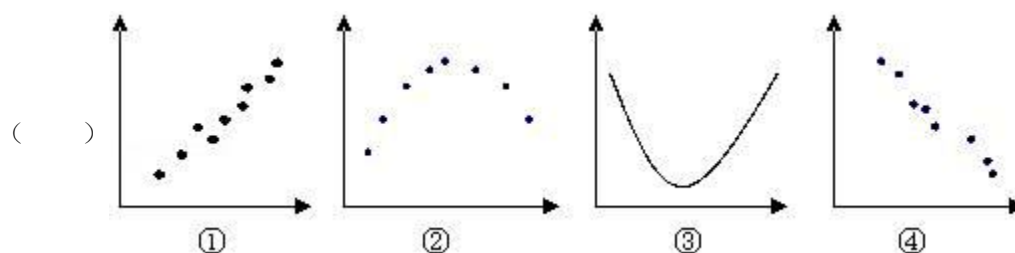
【分析】由 $x^2 > 1$ ，解得： $x > 1$ 或 $x < -1$. 进而判断出结论.

【解答】解：由 $x^2 > 1$ ，解得： $x > 1$ 或 $x < -1$.

$\therefore$ “ $x^2 > 1$ ”是“ $x > 1$ ”的必要不充分条件.

故选：B.

4. 下列四个图各反映了两个变量的某种关系，其中可以看作具有较强线性相关关系的是



A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ①②

【考点】变量间的相关关系.

【分析】观察两个变量的散点图，若样本点成带状分布，则两个变量具有线性相关关系，若带状越细说明相关关系越强，得到两个变量具有线性相关关系的图是①和④.

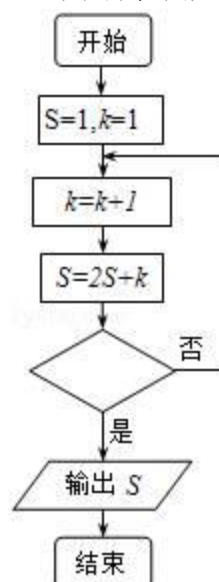
【解答】解： $\because$ 两个变量的散点图，

若样本点成带状分布，则两个变量具有线性相关关系，

$\therefore$ 两个变量具有线性相关关系的图是①和④.

故选 B.

5. 某程序框图如图所示，若输出的 $S=57$ ，则判断框内为 ()



A. $k>4?$ B. $k>5?$ C. $k>6?$ D. $k>7?$

【考点】程序框图.

【分析】分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是累加并输入 S 的值，条件框内的语句是决定是否结束循环，模拟执行程序即可得到答案.

【解答】解：程序在运行过程中各变量值变化如下表：

K	S	是否继续循环
循环前	1	1/
第一圈	2	4 是
第二圈	3	11 是
第三圈	4	26 是
第四圈	5	57 否

故退出循环的条件应为 $k > 4$

故答案选 A.

6. 已知命题 p : “ $|x - 1| > 2$ ”, 命题 q : “ $x \in \mathbb{Z}$ ”. 如果“ p 且 q ”与“非 q ”同时为假命题, 则满足条件的 x 的取值范围为 ()

- A. $\{x | x \geq 3, \text{ 或 } x \leq -1, x \in \mathbb{Z}\}$ B. $\{x | -1 \leq x \leq 3, x \notin \mathbb{Z}\}$
C. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

【考点】复合命题的真假.

【分析】先求出 p 为真命题的等价条件, 利用“ p 且 q ”与“非 q ”同时为假命题, 得到 q 为真命题, p 为假命题. 然后解 x 的取值范围即可.

【解答】解: 由 $|x - 1| > 2$, 解得 $x > 3$ 或 $x < -1$, 即 p : $x > 3$ 或 $x < -1$.

$\because$ 非 q 为假命题, $\therefore q$ 为真命题.

又 p 且 q 为假命题, $\therefore p$ 为假命题,

即非 p : $-1 \leq x \leq 3$,

$\therefore$ 满足条件的 x 的取值范围为 $-1 \leq x \leq 3$ 且 $x \in \mathbb{Z}$,

$\therefore x = -1, 0, 1, 2, 3$. 即 $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

故选: C.

7. 一枚硬币连掷三次至少出现一次正面的概率为 ()

- A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{3}$

【考点】 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率.

【分析】本题是一个等可能事件的概率, 试验发生包含的事件是将一枚硬币连续抛掷三次共有 $2^3=8$ 种结果, 满足条件的事件的对立事件是三枚硬币都是反面, 有 1 种结果, 根据对立事件的概率公式得到结果

【解答】解: 由题意知本题是一个等可能事件的概率,
试验发生包含的事件是将一枚硬币连续抛掷三次共有 $2^3=8$ 种结果,
满足条件的事件的对立事件是三枚硬币都是反面, 有 1 种结果,

$\therefore$ 至少一次正面向上的概率是 $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$,

故选 A.

8. 设 $\alpha \in [0, \pi]$, 则方程 $x^2 \sin \alpha + y^2 \cos \alpha = 1$ 不能表示的曲线为 ()

- A. 椭圆 B. 双曲线 C. 抛物线 D. 圆

【考点】抛物线的标准方程.

【分析】逐一检验答案, 当 $\sin \alpha = 0$ 或 $\cos \alpha = 0$ 时, 方程表示直线. 当 $\sin \alpha = \cos \alpha > 0$ 时, 方程表示圆. 当 $\sin \alpha$ 与 $\cos \alpha$ 符号相反时, 双曲线. 不论 $\sin \alpha$ 与 $\cos \alpha$ 怎样取值, 曲线不可能是抛物线, 从而进行排除筛选.

【解答】解: 当 $\sin \alpha = 0$ 或 $\cos \alpha = 0$ 时, 方程表示直线.

当 $\sin \alpha = \cos \alpha > 0$ 时, 方程表示圆.

当 $\sin \alpha$ 与 $\cos \alpha$ 符号相反时, 双曲线.

不论 $\sin \alpha$ 与 $\cos \alpha$ 怎样取值, 曲线不可能是抛物线.

故选 C.

9. 在样本频率分布直方图中, 共有 9 个小长方形, 若中间一个小长方形的面积等于它 8 个长方形的面积和的 $\frac{2}{5}$, 且样本容量为 140, 则中间一组的频数为 ()

A. 28 B. 40 C. 56 D. 60

【考点】频率分布直方图.

【分析】设中间一组的频数为 x , 利用中间一个小长方形的面积等于它 8 个长方形的面积和的 $\frac{2}{5}$, 建立方程, 即可求 x .

【解答】解: 设中间一组的频数为 x ,

因为中间一个小长方形的面积等于它 8 个长方形的面积和的 $\frac{2}{5}$,

所以其他 8 组的频数和为 $\frac{5}{2}x$,

由 $x + \frac{5}{2}x = 140$, 解得 $x = 40$.

故选 B.

10. 有一个正方体棱长为 1, 点 A 为这个正方体的一个顶点, 在这个正方体内随机取一个点 P, 则点 P 到点 A 的距离大于 1 的概率为 ()

A. $1 - \frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $1 - \frac{\pi}{3}$ D. $1 - \frac{\pi}{6}$

【考点】几何概型.

【分析】根据题意, 分析可得, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 与点 A 距离小于等于 1 的点在以 A 为球心, 半径为 1 的八分之一球内, 计算可得其体积, 易得正方体的体积; 由几何概型公式, 可得点 P 到点 A 的距离小于等于 1 的概率, 借助对立事件概率的性质, 计算可得答案.

【解答】解: 根据题意, 分析可得,

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 与点 A 距离小于等于 1 的点在以 A 为球心, 半径为 1 的八分之一球内,

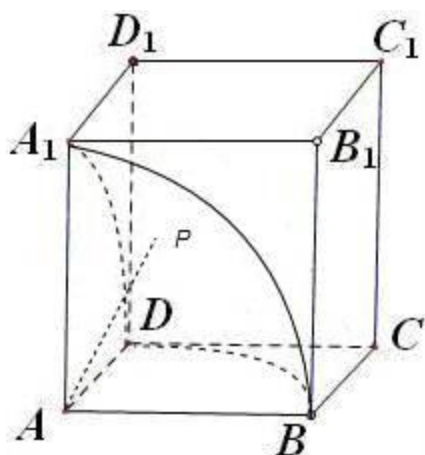
其体积为 $V_1 = \frac{1}{8} \times \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} = \frac{\pi}{6}$;

正方体的体积为 $1^3 = 1$,

则点 P 到点 A 的距离小于等于 1 的概率为: $\frac{\frac{\pi}{6}}{1} = \frac{\pi}{6}$,

故点 P 到点 A 的距离大于 1 的概率为 $1 - \frac{\pi}{6}$,

故选: D.



11. 若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点，且与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 有相同的焦点，则该椭圆的方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ B. $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ C. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ D. $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$

【考点】圆锥曲线的共同特征.

【分析】求出抛物线的焦点坐标，求出双曲线的两焦点坐标，即为椭圆的焦点坐标，即可得到 c 的值，然后根据椭圆的基本性质得到 a 与 b 的关系，设出关于 b 的椭圆方程，把抛物线的焦点坐标代入即可求出 b 的值，得到椭圆方程.

【解答】解：抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 $(2, 0)$ ，双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的焦点坐标为 $(\sqrt{2}, 0)$ ，
 $(-\sqrt{2}, 0)$ ，

所以椭圆过 $(2, 0)$ ，且椭圆的焦距 $2c = 2\sqrt{2}$ ，即 $c = \sqrt{2}$ ，则 $a^2 - b^2 = c^2 = 2$ ，即 $a^2 = b^2 + 2$ ，

所以设椭圆的方程为： $\frac{x^2}{b^2+2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，把 $(2, 0)$ 代入得： $\frac{4}{b^2+2} = 1$ 即 $b^2 = 2$ ，

则该椭圆的方程是： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

故选 A

12. 过双曲线的一个焦点 F_2 作垂直于实轴的直线，交双曲线于 P 、 Q ， F_1 是另一焦点，若 $\angle PF_1Q = \frac{\pi}{2}$ ，则双曲线的离心率 e 等于（ ）

- A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} + 2$

【考点】双曲线的简单性质；双曲线的应用.

【分析】根据由题设条件可知 $|PF_2| = \frac{b^2}{a}$ ， $|F_1F_2| = 2c$ ，由此可以求出双曲线的离心率 e .

【解答】解：由题意可知 $|PF_2| = \frac{b^2}{a}$ ， $|F_1F_2| = 2c$ ，

$$\therefore \angle PF_1Q = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore 2(4c^2 + \frac{b^4}{a^2}) = \frac{4b^4}{a^2},$$

$$\therefore 4a^2c^2 = b^4 = (c^2 - a^2)^2 = c^4 - 2a^2c^2 + a^4,$$

$$\text{整理得 } c^4 - 6c^2 + a^4 = 0,$$

$$\text{解得 } e = \sqrt{2} + 1 \text{ 或 } e = \sqrt{2} - 1 \text{ (舍去)}$$

故选 C.

13. 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB$, 则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于 ()

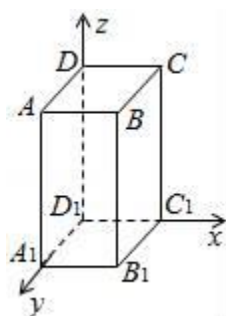
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

【考点】用空间向量求直线与平面的夹角；直线与平面所成的角.

【分析】设 $AB=1$, 则 $AA_1=2$, 分别以 $\overrightarrow{D_1A_1}$ 、 $\overrightarrow{D_1C_1}$ 、 $\overrightarrow{D_1D}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BDC_1 的一个法向量, CD 与平面 BDC_1 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin\theta = \left| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{DC}|} \right|, \text{ 在空间坐标系下求出向量坐标, 代入计算即可.}$$

【解答】解: 设 $AB=1$, 则 $AA_1=2$, 分别以 $\overrightarrow{D_1A_1}$ 、 $\overrightarrow{D_1C_1}$ 、 $\overrightarrow{D_1D}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 如下图所示:



$$\text{则 } D(0, 0, 2), C_1(1, 0, 0), B(1, 1, 2), C(1, 0, 2),$$

$$\overrightarrow{DB} = (1, 1, 0), \overrightarrow{DC_1} = (1, 0, -2), \overrightarrow{DC} = (1, 0, 0),$$

$$\text{设 } \vec{n} = (x, y, z) \text{ 为平面 } BDC_1 \text{ 的一个法向量, 则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x+y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n} = (2, -2, 1),$$

设 CD 与平面 BDC_1 所成角为 θ , 则 $\sin\theta = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{DC}}{|\vec{n}| |\vec{DC}|} \right| = \frac{2}{3}$,

故选 A.

14. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A 、 B 两点, 点 O 是坐标原点, 若 $|AF|=5$, 则 $\triangle AOB$ 的面积为 ()

- A. 5 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{17}{8}$

【考点】直线与圆锥曲线的综合问题; 抛物线的简单性质.

【分析】设 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 算出抛物线的焦点坐标, 从而可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$, 与抛物线方程联解消去 x 可得 $y^2 - \frac{4}{k}y - 4=0$, 利用根与系数的关系算出 $y_1y_2=-4$. 根据 $|AF|=5$ 利用抛物线的定义算出 $x_1=4$, 可得 $y_1=\pm 4$, 进而算出 $|y_1 - y_2|=5$, 最后利用三角形的面积公式加以计算, 即可得到 $\triangle AOB$ 的面积.

【解答】解: 根据题意, 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$.

设直线 AB 的斜率为 k , 可得直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases} \text{ 消去 } x, \text{ 得 } y^2 - \frac{4}{k}y - 4=0,$$

设 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 由根与系数的关系可得 $y_1y_2=-4$.

根据抛物线的定义, 得 $|AF|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+1=5$, 解得 $x_1=4$,

代入抛物线方程得: $y_1^2=4 \times 4=16$, 解得 $y_1=\pm 4$,

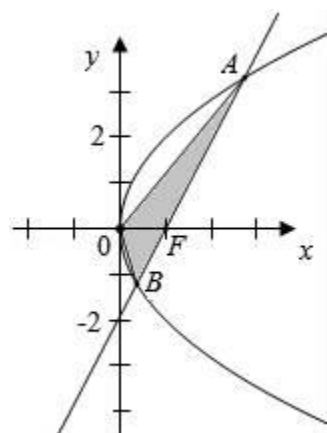
$\therefore$ 当 $y_1=4$ 时, 由 $y_1y_2=-4$ 得 $y_2=-1$; 当 $y_1=-4$ 时, 由 $y_1y_2=-4$ 得 $y_2=1$,

$\therefore |y_1 - y_2|=5$, 即 AB 两点纵坐标差的绝对值等于 5.

因此 $\triangle AOB$ 的面积为:

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOF} + S_{\triangle BOF} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1| + \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_2| = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 1 \times 5 = \frac{5}{2}.$$

故选: B



二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

15. 某学院的 A, B, C 三个专业共有 1200 名学生, 为了调查这些学生勤工俭学的情况, 拟采用分层抽样的方法抽取一个容量为 120 的样本. 已知该学院的 A 专业有 380 名学生, B 专业有 420 名学生, 则在该学院的 C 专业应抽取 40 名学生.

【考点】分层抽样方法.

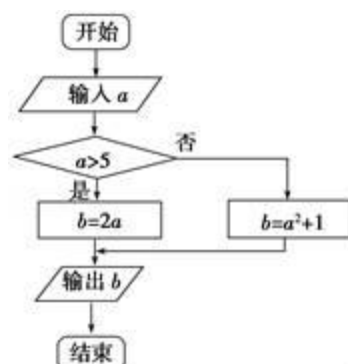
【分析】根据全校的人数和 A, B 两个专业的人数, 得到 C 专业的人数, 根据总体个数和要抽取的样本容量, 得到每个个体被抽到的概率, 用 C 专业的人数乘以每个个体被抽到的概率, 得到结果.

【解答】解: $\because$ C 专业的学生有 $1200 - 380 - 420 = 400$,

由分层抽样原理, 应抽取 $120 \times \frac{400}{1200} = 40$ 名.

故答案为: 40

16. 观察程序框图如图所示. 若 $a=5$, 则输出 $b=$ 26 .



【考点】程序框图.

【分析】模拟程序的运行, 根据框图的流程计算程序运行的结果, 即可得解.

【解答】解: 模拟程序的运行, 可得

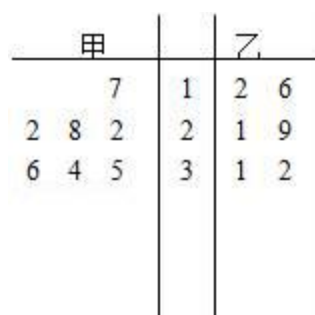
$a=5$

不满足条件 $a > 5$, $b=5^2+1=26$,

输出 b 的值为 26.

故答案为: 26.

17. 如图是甲、乙两名篮球运动员 2013 年赛季每场比赛得分的茎叶图, 则甲、乙两人比赛得分的中位数之和为 53 .



【考点】茎叶图.

【分析】由茎叶图可知甲、乙的得分数据, 分别求出两组数据的中位数, 作和得答案.

【解答】解: 由茎叶图可知, 甲、乙的得分数据分别为:

甲：17, 22, 22, 28, 34, 35, 36, 中位数为 28;

乙：12, 16, 21, 29, 31, 32, 中位数为 $\frac{21+29}{2}=25$.

$\therefore$ 甲、乙两人比赛得分的中位数之和为 $28+25=53$.

故答案为：53.

18. 对于以下命题：

① $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ 是 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线的充要条件；

② 对空间任意一点 O 和不共线的三点 A、B、C, 若 $\vec{OP} = 2\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}$, 则 P、A、B、C 四点共面.

③ 如果 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, 那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角

④ 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 为空间一个基底, 则 $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}\}$ 构成空间的另一个基底;

⑤ 若 $\vec{\pi} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{n} = -2\vec{a} + 4\vec{b} - 6\vec{c}$, 则 $\vec{\pi} \parallel \vec{n}$.

其中不正确结论的序号是 ①②③.

【考点】命题的真假判断与应用.

【分析】利用不等式 $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ 方向相反, 可判断判断①;

利用共面向量定理判断②是否正确;

利用 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, 那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角或平角, 来判断③是否正确;

根据不共面的三个向量可构成空间一个基底, 结合共面向量定理, 用反证法证明即可判断④;

根据向量共线的充要条件, 可判断⑤

【解答】解：对于①, $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ 方向相反, 故 $|\vec{a}| - |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ 是 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线的充分不必要条件, 故错误;

对于②, 对空间任意一点 O 和不共线的三点 A、B、C, 若 $\vec{OP} = 2\vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}$, $\because 2 - 2 - 1 = -1 \neq 1$, 根据共面向量定理 P、A、B、C 四点不共面, 故错误.

对于③, 如果 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, 那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角或平角, 故错误;

对于④, 用反证法, 若 $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}\}$ 不构成空间的一个基底;

设 $\vec{a} + \vec{b} = x(\vec{b} + \vec{c}) + (1 - x)(\vec{c} + \vec{a}) \Rightarrow x\vec{a} = (x - 1)\vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = x\vec{a} + (1 - x)\vec{b}$, 即 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面, $\because \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 为空间的一个基底, 故正确;

对于⑤, 若 $\vec{\pi} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{n} = -2\vec{a} + 4\vec{b} - 6\vec{c}$, 则 $\vec{\pi} = -\frac{1}{2}\vec{n}$, 则 $\vec{\pi} \parallel \vec{n}$, 故正确.

故不正确结论的序号是：①②③,

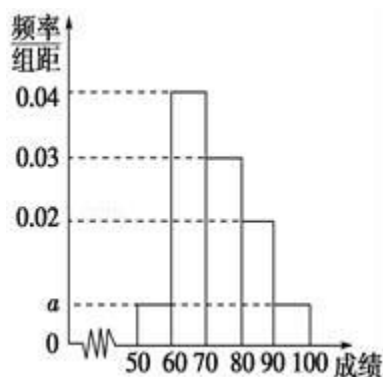
故答案为：①②③

三、解答题 (每题 12 分, 共 60 分)

19. 某校 100 名学生其中考试数学成绩的频率分布直方图如图所示, 其中成绩分布区间是 $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$.

(1) 求图中 a 的值;

(2) 根据频率分布直方图, 估计这次 100 名学生数学成绩的平均数及中位数.



【考点】频率分布直方图.

【分析】(1) 根据频率和为 1, 列出方程求出 a 的值;

(2) 根据频率分布直方图计算出平均数与中位数的值.

【解答】解: (1) 由频率分布直方图可知:

$$2a + 0.04 + 0.03 + 0.02 = 0.1,$$

所以 $a = 0.005$;

(2) 根据频率分布直方图, 估计平均数为:

$$55 \times 0.05 + 65 \times 0.4 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.2 + 95 \times 0.05 = 73 \text{ (分)}.$$

估计中位数为:

$$70 + \frac{0.05}{0.3} \times 10 = \frac{215}{3} \text{ (分)}.$$

20. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右两个焦点, 点 $A(1, \frac{3}{2})$

在椭圆上, 且点 A 到 F_1, F_2 两点的距离之和等于 4.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 若 K 为椭圆 C 上的一点, 且 $\angle F_1KF_2 = 30^\circ$, 求 $\triangle F_1KF_2$ 的面积.

【考点】椭圆的简单性质.

【分析】(1) 由点 A 到 F_1, F_2 两点的距离之和等于 4, 可得 $2a = 4$, 解得 a . 又点 $A(1, \frac{3}{2})$

在椭圆上, 可得 $\frac{1}{4} + \frac{9}{4b^2} = 1$, 解得 b^2 , 即可得出.

(2) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$. 记 $|KF_1| = m, |KF_2| = n$, 则 $m + n = 4$, 由余弦定理可得:

$$|F_1F_2|^2 = (2c)^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos 30^\circ, \text{ 可得 } mn. \text{ 利用}$$

$$S_{\triangle F_1KF_2} = \frac{1}{2} mn \sin 30^\circ = \frac{1}{4} mn, \text{ 即可得出.}$$

【解答】解: (1) $\because$ 点 A 到 F_1, F_2 两点的距离之和等于 4.

$\therefore 2a = 4$, 解得 $a = 2$.

又点 $A(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆上, $\therefore \frac{1}{4} + \frac{9}{4b^2} = 1$, 解得 $b^2 = 3$,

所以所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

$$(2) \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1.$$

记 $|KF_1| = m$, $|KF_2| = n$, 则 $m+n=4$,

由余弦定理可得: $|F_1F_2|^2 = (2c)^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos 30^\circ$,

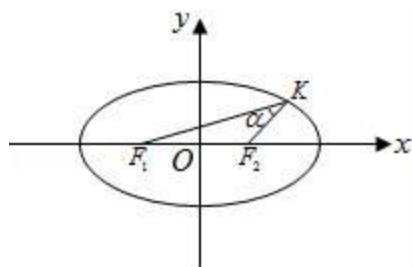
$$\therefore (2c)^2 = m^2 + n^2 - \sqrt{3} mn,$$

$$(2c)^2 = (m+n)^2 - (2+\sqrt{3}) mn,$$

$$\therefore mn = 12(2 - \sqrt{3}),$$

$$\text{又 } S_{\triangle F_1KF_2} = \frac{1}{2} mn \sin \alpha = \frac{1}{4} mn,$$

$$\therefore S_{\triangle F_1KF_2} = 3(2 - \sqrt{3}).$$



21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 实轴长为 2.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 求直线 $y=x+1$ 被双曲线 C 截得的弦长.

【考点】 双曲线的简单性质.

【分析】 (1) 利用双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 实轴长为 2, 求

出 a , c , 可得 b , 即可求双曲线 C 的方程;

(2) $y=x+1$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 整理可得 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 求出 x , 即可求直线 $y=x+1$ 被双曲线

C 截得的弦长.

【解答】 解: (1) $\because$ 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 实轴长为 2,

$$\therefore a=1, c=\sqrt{3},$$

$$\therefore b=\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{双曲线 } C \text{ 的方程 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1;$$

$$(2) y=x+1 \text{ 代入 } x^2 - \frac{y^2}{2} = 1, \text{ 整理可得 } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore x = -1 \text{ 或 } 3,$$

$$\therefore \text{直线 } y=x+1 \text{ 被双曲线 } C \text{ 截得的弦长} = \sqrt{1+1} \cdot |3+1| = 4\sqrt{2}.$$

22. 已知 $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 3, 0)$,

(1) 若 $k\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 互相垂直, 求实数 k 的值;

(2) 若 $\vec{c} = (x, 1, 1)$, 且 $|\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{5}$, 求实数 x 的值.

【考点】平面向量数量积的坐标表示、模、夹角.

【分析】(1) 根据两非零向量垂直的充要条件, 即可建立关于 k 的方程, 解方程即得 k 的值;

(2) 先求向量 $\vec{b} - \vec{c}$ 的坐标, 根据坐标表示出向量 $\vec{b} - \vec{c}$ 的长度, 即可建立关于 x 的方程,

解方程即得 x 的值.

【解答】解: (1) $k\vec{a} - \vec{b} = (1, k-3, k)$, $\vec{a} + \vec{b} = (-1, 4, 1)$, 由 $k\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 互相

垂直可知: $(k\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = -1 + 4(k-3) + k = 0$, 得: $k = \frac{13}{5}$;

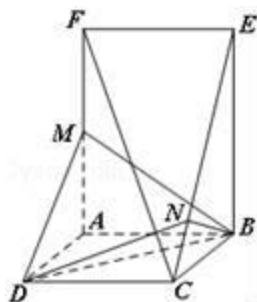
(2) $\vec{b} - \vec{c} = (-1-x, 2, -1)$, 由条件可知: $\sqrt{(-1-x)^2 + 5} = \sqrt{5}$, 解得: $x = -1$;

即实数 x 的值为: -1 .

23. 已知如图几何体, 正方形 $ABCD$ 和矩形 $ABEF$ 所在平面互相垂直, $AF=2AB=2AD=2$, M 为 AF 的中点, $BN \perp CE$, 垂足为 N .

(I) 求证: $CF \parallel$ 平面 BDM ;

(II) 求二面角 $M-BD-N$ 的大小.



【考点】二面角的平面角及求法; 直线与平面平行的判定.

【分析】(I) 连接 AC , BD 交于 O , 连接 MO , 由三角形中位线定理可得 $OM \parallel CF$, 再由线面平行的判定得答案;

(II) 分别以 AD, AB, AF 所在直线为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 分别求出平面 MBD 与平面 DNB 的一个法向量, 利用两个平面法向量所成角求得二面角 M - BD - N 的大小.

【解答】(I) 证明: 连接 AC, BD 交于 O, 连接 MO,

∵ M 为 AF 的中点, ∴ OM // CF,

∵ OM ⊂ 平面 BDM, CF ⊄ 平面 BDM,

∴ CF // 平面 BDM;

(II) 解: 分别以 AD, AB, AF 所在直线为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

∵ AF = 2AB = 2AD = 2, M 为 AF 的中点, BN ⊥ CE,

∴ D (1, 0, 0), B (0, 1, 0), M (0, 0, 1), N ($\frac{4}{5}$, 1, $\frac{2}{5}$),

则 $\overrightarrow{DM} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{BM} = (0, -1, 1)$,

设平面 MBD 的一个法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{DM} = -x_1 + z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BM} = -y_1 + z_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } z_1 = 1, \text{得 } \vec{m} = (1, 1, 1);$$

$\overrightarrow{DN} = (-\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5})$, $\overrightarrow{BN} = (\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5})$,

设平面 DNB 的一个法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DN} = -\frac{1}{5}x_2 + y_2 + \frac{2}{5}z_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BN} = \frac{4}{5}x_2 + \frac{2}{5}z_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_2 = 1, \text{得 } \vec{n} = (1, 1, -2).$$

$$\text{则 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{1 \times 1 + 1 \times 1 - 2 \times 1}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = 0.$$

∴ 二面角 M - BD - N 的大小为 90°.

