

2015—2016 学年度上学期期末考试

高二年级文科数学试卷

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟

第 I 卷

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = n^2 + 1$ ，则 $a_5 =$ ()

A. 7 B. 9 C. 11 D. 12

2. 已知命题 $P: \forall x \in R, x^2 \geq 0$ ，则 ()

A. $\neg P: \exists x_0 \in R, x_0^2 \leq 0$ B. $\neg P: \exists x_0 \in R, x_0^2 > 0$

C. $\neg P: \exists x_0 \in R, x_0^2 < 0$ D. $\neg P: \forall x \in R, x^2 \leq 0$

3. 设 $a > b$ ，则下列不等式成立的是 ()

A. $a^2 + b^2 > ab$ B. $\frac{b-a}{ab} < 0$ C. $a^2 > b^2$ D. $2^a < 2^b$

4. 数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 2^{a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，则“数列 $\{a_n\}$ 是等差数列”是“数列 $\{b_n\}$ 是等比数列”的 ()

A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 在直角坐标平面内，满足方程 $(y^2 + 2|x|)(\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}) = 0$ 的点 (x, y) 所构成的图形

为 ()

A. 抛物线及原点 B. 双曲线及原点 C. 抛物线、双曲线及原点 D. 两条相交直线

6. 设公差为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_4 = 2(a_2 + a_3)$ ，则 $\frac{S_7}{S_4} =$ ()

A. $\frac{7}{4}$ B. $\frac{14}{5}$ C. 7 D. 14

7. 函数 $f(x) = x(e^x - 1) + \ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 ()

A. $y = 2ex - e - 1$ B. $y = 2ex - e + 1$

C. $y = 2ex + e - 1$

D. $y = 2ex + e + 1$

8. 若正实数 x, y 满足不等式 $2x + y < 4$, 则 $x - y$ 的取值范围是 ()

A. $[-4, 2]$

B. $(-4, 2)$

C. $(-2, 2]$

D. $[-2, 2)$

9. 已知点 P 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上一点, 记 P 到此抛物线准线 l 的距离为 d_1 , 点 P 到圆 $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 4$ 上点的距离为 d_2 , 则 $d_1 + d_2$ 的最小值为 ()

A. 6

B. 1

C. 5

D. 3

10. 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n , 若 $T_n = 2^{n^2+n}$, 则 $\frac{a_n + 12}{2^n}$ 的最小值为 ()

A. 7

B. 8

C. $4\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

11. 已知 $f(x)$ 的图像关于原点对称, 且当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) - xf'(x) > 0$

(其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数), $a = \frac{\sqrt{2}}{2} f(0.5^{-0.5})$, $b = (\log_3 \pi) f(\log_\pi 3)$,

$c = (\log_9 \frac{1}{3}) f(\log_{\frac{1}{3}} 9)$, 则下列关系式正确的是 ()

A. $c > a > b$

B. $b > a > c$

C. $a > c > b$

D. $a > b > c$

12. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线的右支上, 且 $|PF_1| = 3|PF_2|$, 则此双曲线的离心率的取值范围为 ()

A. $(1, \sqrt{2})$

B. $(1, 2]$

C. $(0, 2]$

D. $[2, +\infty)$

第 II 卷

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请把答案填在答题卡的横线上)

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm x$, 且经过点 $(\sqrt{2}, 1)$, 则该双曲线的方程为_____.

14. 已知关于 x 的不等式 $ax + b > 0$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{2})$, 则关于 x 的不等式 $bx^2 - a > 0$ 的解集为_____.

15. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 4\}$ $B = \{(x, y) \mid |y| - |x| \leq 0\}$, 设集合 $C = A \cap B$, 则集合 C 所对应的平面区域的面积为_____.

16. 设 $f(x)$ 是定义域 $\mathbf{R}$ 上的增函数, $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$, 且 $f(3) = 3$, 记 $a_n = f(n) (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ _____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知条件 $p: \exists m \in [-1, 1]$ 使不等式 $a^2 - 5a + 5 \geq m + 2$ 成立; 条件 $q: x^2 + ax + 2 = 0$ 有两个负数根, 若 $p \vee q$ 为真, 且 $p \wedge q$ 为假, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + ax - a^2 \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, a]$ 上的最小值.

19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = 3a_n - 1$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $a_n b_n = \frac{3^n}{n^2 + n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $T_n < c^2 - 2c$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

求实数 c 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

已知圆 $G: x^2 + y^2 - x - \sqrt{3}y = 0$ ，经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 及上顶点 B ，过圆外一点 $(m, 0) (m > a)$ 倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线 l 交椭圆于 C, D 两点，

(I) 求椭圆的方程；

(II) 若右焦点 F 在以线段 CD 为直径的圆 E 的内部，求 m 的取值范围。

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{a \ln x + b}{e^x}$ (a, b 为常数，无理数 $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数)，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 $y = \frac{1}{e}$ 。

(I) 求 a, b 的值；

(II) 证明不等式 $1 - x - x \ln x < \frac{e^x}{x+1} (1 + e^{-2})$ 。

22. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右两个顶点分别为 A, B 。曲线 M 是以 A, B 两点为短轴端点，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆。设点 P 在第一象限且在曲线 C 上，直线 AP 与椭圆 M 相交于另一点 T 。

(I) 设点 P, T 的横坐标分别为 x_1, x_2 ，证明： $x_1 x_2 = 1$ ；

(II) 设 $\triangle TAB$ 与 $\triangle POB$ (其中 O 为坐标原点) 的面积分别为 S_1 与 S_2 ，且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \leq 9$ ，求 $S_1 \cdot S_2$ 的最大值。