

2016-2017 学年第二学期期末考试高二数学（文）试题

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

第 I 卷(共 60 分)

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 是虚数单位，若复数 $-i(a+i)(a \in R)$ 的实部与虚部相等，则 $a =$

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

2. 若集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{x | x^2 \leq 4, x \in N\}$ ，则 $A \cap B =$

- (A) $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ (B) $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ (C) $\{0, 1, 2\}$ (D) $\{1, 2\}$

3. 已知 $x > 0, y > 0, \lg 2^x + \lg 4^y = \lg 2$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是 ()

- A. 6 B. 5 C. $3 + 2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

4. $y = \cos(x+1)$ 图像上相邻的最高点和最低点之间的距离是 ()

- A. $\sqrt{\pi^2 + 4}$ B. π C. 2 D. $\sqrt{\pi^2 + 1}$

5. 在区间 $[-1, 4]$ 上随机选取一个数 x ，则 $x \leq 1$ 的概率为

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{4}$

6. 已知抛物线 $y^2 = x$ 的焦点是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的一个焦点，则椭圆的离心率为

- (A) $\frac{\sqrt{37}}{37}$ (B) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{7}$

7. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - x + b \geq 0$ 的解集为 $[-2, 1]$ ，则关于 x 的不等式 $bx^2 - x + a \leq 0$ 的解集为 ()

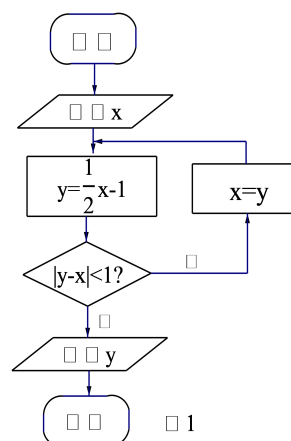
- A. $[-1, 2]$ B. $[-1, \frac{1}{2}]$ C. $[-\frac{1}{2}, 1]$ D. $[-1, -\frac{1}{2}]$

8. 圆 $\rho = 5 \cos \theta - 5\sqrt{3} \sin \theta$ 的圆心极坐标是 ()

- A. $(5, \frac{5\pi}{3})$ B. $(-5, \frac{\pi}{3})$ C. $(5, \frac{\pi}{3})$ D. $(-5, \frac{5\pi}{3})$

9. 在图 1 的程序框图中，若输入的 x 值为 2，则输出的 y 值为

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -1 (D) $-\frac{3}{2}$



10. 某几何体的三视图如图 2 所示，则该几何体的侧面积是

- (A) 76 (B) 70 (C) 64 (D) 62

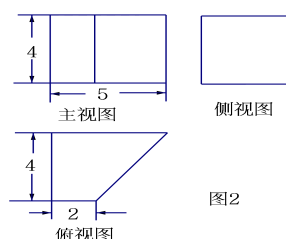


图2

11. 设集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+1} \leq 0 \right\}$, $B = \{ x \mid |x| \leq 1 \}$, 则 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的 ()

- A. 充要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_{11} - a_8 = 3$, $S_{11} - S_8 = 3$, 则使 $a_n > 0$ 的最小正整数 n 的值是 ()

- A. 11 B. 10 C. 9 D. 8

第 II 卷(共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题~第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题~第 24 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ 的最小正周期为_____。

14. 已知实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} y-x \leq 2 \\ x+y \geq 2 \\ 3x-y \leq 3 \end{cases}$ ，则 $2x-y$ 的最小值为_____。

15. 甲、乙、丙三位同学获得某项竞赛活动的前三名，但具体名次未知。3 人作出如下预测：

甲说：我不是第三名； 乙说：我是第三名； 丙说：我不是第一名。

若甲、乙、丙 3 人的预测结果有且只有一个正确，由此判断获得第一名的是_____.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=3a_n+1$ ，且 $a_1=1$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=_____$.

三、解答题:本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明．证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_4=4$ ；数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_2, b_2=a_5$ ，数列 $\{b_n-a_n\}$ 为等比数列.

(I)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(II)求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分)

某地区以“绿色出行”为宗旨开展“共享单车”业务.该地区某高级中学一兴趣小组由 9 名高二级学生和 6 名高一级学生组成，现采用分层抽样的方法抽取 5 人，组成一个体验小组去市场体验“共享单车”的使用.问：

(I)应从该兴趣小组中抽取高一级和高二级的学生各多少人；

(II)已知该地区有 X, Y 两种型号的“共享单车”，在市场体验中，该体验小组的高二级学生都租 X 型车，高一级学生都租 Y 型车.如果从组内随机抽取 2 人，求抽取的 2 人中至少有 1 人在市场体验过程中租 X 型车的概率.

19. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x)=4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})-1$.

(I)求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间；

(II)求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

20. (本题满分 12 分) 设对于任意实数 x ，不等式 $|x+7|+|x-1|\geq m$ 恒成立.

(I)求实数 m 的取值范围；

(II)当 m 取最大值时，解关于 x 的不等式： $|x-3|-2x\leq 2m-12$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 若对任意 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, 都有 $f(x) + \frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{3}{2} \leq 0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

22. (本题满分 12 分) 设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足

$$4S_n = a_{n+1}^2 - 4n - 1, n \in N^*, \text{ 且 } a_2, a_5, a_{14} \text{ 构成等比数列.}$$

(I) 证明: $a_2 = \sqrt{4a_1 + 5}$;

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(III) 证明: 对一切正整数 n , 有 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} < \frac{1}{2}$.

高二数学(文) 参考答案

1. B2. C3. C4. A5. C6. D7. C8. A9. D10. C11. C12. B

13. 2π 14. -2 15. 乙 16. $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

17. 解: (I) 由数列 $\{a_n\}$ 是等差数列且 $a_1 = 1, a_4 = 4$

$$\therefore \text{公差 } d = \frac{a_4 - a_1}{3} = 1, \therefore a_n = a_1 + (n-1)d = n, \because b_1 = a_2 = 2, b_2 = a_5 = 5,$$

$$\therefore b_1 - a_1 = 1, b_2 - a_2 = 3,$$

$$\therefore \text{数列 } \{b_n - a_n\} \text{ 的公比 } q = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = 3, \therefore b_n - a_n = (b_1 - a_1)q^{n-1} = 3^{n-1},$$

$$\therefore b_n = n + 3^{n-1};$$

(II) 由 $b_n = n + 3^{n-1}$ 得

$$S_n = (1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

$$= \frac{3^n + n(n+1) - 1}{2}.$$

18. 解: (I) 依题意知, 应从该兴趣小组中抽取的高一学生人数为 $\frac{5}{9+6} \times 6 = 2$,

高二学生的人数为: $\frac{5}{9+6} \times 9 = 3$;

(II) 解法 1: 记抽取的 2 名高一学生为 a_1, a_2 , 3 名高二的学生为 b_1, b_2, b_3 ,

则从体验小组 5 人中任取 2 人的所有可能为: $(a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_3)$, 共 10 种可能; 其中至少有 1 人在市场体验过程中租 X 型车的有: $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_3)$ 共 9 种,

故所求的概率 $P = \frac{9}{10}$ 【解法 2: 记抽取的 2 名高一学生为 a_1, a_2 , 3 名高二的学生为 b_1, b_2, b_3 ,

则从体验小组 5 人中任取 2 人的所有可能为: $(a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3),$

$(a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_3)$ 共 10 种可能; 其中所抽的 2 人都不租 X 型

车的有: (a_1, a_2) 一种,

故所求的概率 $P = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

19. 解: (I) 因为 $f(x) = 4\cos x \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1$

$$= 4\cos x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) - 1$$

$$= \sqrt{3} \sin 2x + 2\cos^2 x - 1 = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right),$$

故 $f(x)$ 最小正周期为 π

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 得 } k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}$$

故 $f(x)$ 的增区间是 $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right], k \in Z$

(II) 因为 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$.

于是, 当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2;

当 $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$, 即 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -1

20. 解 (I) $|x+7| + |x-1|$ 可以看做数轴上的点 x 到点 -7 和点 1 的距离之和.

$$\therefore (|x+7|+|x-1|)\min=8, \therefore m \leq 8$$

(II) 由(I)得 m 的最大值为 8, 原不等式等价于: $|x-3|-2x \leq 4$.

$$\therefore \text{有} \begin{cases} x \geq 3 \\ x-3-2x \leq 4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x < 3 \\ 3-x-2x \leq 4. \end{cases}$$

从而 $x \geq 3$ 或 $-\frac{1}{3} \leq x < 3$,

$$\therefore \text{原不等式的解集为} \left\{ x \mid x \geq -\frac{1}{3} \right\}$$

21.解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$\because f'(x) = \ln x + 1$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{e}$, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 无极大值,

当 $x = \frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有极小值, $f(x)_{\text{极小}} = f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$, (II) 当 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$

时, 由 $f(x) + \frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{3}{2} \leq 0$, 得 $a \leq -\ln x - \frac{x}{2} - \frac{3}{2x}$, 记 $g(x) = -\ln x - \frac{x}{2} - \frac{3}{2x}$,

$$x \in \left[\frac{1}{e}, e\right],$$

$$\text{则 } g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2x^2} = -\frac{(x+3)(x-1)}{2x^2},$$

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 时, 得 $g'(x) > 0$, 当 $x \in (1, e)$ 时, $g'(x) < 0$

$\therefore g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 上单调递增, 在 $(1, e)$ 上单调递减, 又 $g\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{2e} - \frac{3e}{2}$,

$$g(e) = -1 - \frac{e}{2} - \frac{3}{2e},$$

$$\because g\left(\frac{1}{e}\right) - g(e) = 2 + \frac{1}{e} - e < 0, \therefore g\left(\frac{1}{e}\right) < g(e),$$

故 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)$, 故只需 $a \leq g\left(\frac{1}{e}\right)$,

即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, 1 - \frac{1}{2e} - \frac{3e}{2}\right]$.

22. 解 (I) 当 $n=1$ 时, $4a_1 = a_2^2 - 5, a_2^2 = 4a_1 + 5, \because a_n > 0 \therefore a_2 = \sqrt{4a_1 + 5}$

(II) 当 $n \geq 2$ 时, $4S_{n-1} = a_n^2 - 4(n-1) - 1, 4a_n = 4S_n - 4S_{n-1} = a_{n+1}^2 - a_n^2 - 4$

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 4a_n + 4 = (a_n + 2)^2, \because a_n > 0 \therefore a_{n+1} = a_n + 2$$

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $\{a_n\}$ 是公差 $d=2$ 的等差数列.

$\because a_2, a_5, a_{14}$ 构成等比数列, $\therefore a_5^2 = a_2 \cdot a_{14}, (a_2 + 8)^2 = a_2 \cdot (a_2 + 24)$, 解得 $a_2 = 3$,

由 (I) 可知, $4a_1 = a_2^2 - 5 = 4, \therefore a_1 = 1$

$\because a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2 \therefore \{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 1$, 公差 $d = 2$ 的等差数列.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.

$$(III) \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right] < \frac{1}{2}.$$