2016学年度第二学期质量抽测

高三数学试卷

2017.4

注意：1. 答卷前，考生务必在试卷上指定位置将学校、班级、姓名、考号填写清楚.

2. 本试卷共有21道试题，满分150分，考试时间120分钟.

一、填空题（本大题共有12小题，满分54分）只要求直接填写结果，1-6题每个空格填对得4分，7-12题每个空格填对得5分，否则一律得零分.

1、已知集合 $A=\left\{x\left|\dfrac{x-2}{x+1}\ge 0\right.\right\}$，集合 $B=\left\{y\left|0\le y<4\right.\right\}$，则 $A\cap B=$____$[2,4)$________.

2、若直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=4-4t\\y=-2+3t\end{cases}$，$t\in\mathbf{R}$，则直线 l 在 y 轴上的截距是_____1______.

3、已知圆锥的母线长为4，母线与旋转轴的夹角为 $30°$，则该圆锥的侧面积为____8π______.

4、抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 的焦点到准线的距离为______2_______.

5、已知关于 x,y 的二元一次方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\1 & -2 & 0\end{pmatrix}$，则 $3x-y=$___5_______.

6、若三个数 a_1,a_2,a_3 的方差为1，则 $3a_1+2,3a_2+2,3a_3+2$ 的方差为__9.

7、已知射手甲击中 A 目标的概率为0.9，射手乙击中 A 目标的概率为0.8，若甲、乙两人各向 A 目标射击一次，则射手甲或射手乙击中 A 目标的概率是___0.98________.

8、函数 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right),x\in\left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right]$ 的单调递减区间是_____$\left[0,\dfrac{2}{3}\pi\right]$__________.

9、已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为2，前 n 项和为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{a_na_{n+1}}=$___$\dfrac{1}{4}$______.

10、已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：① $f(x)+f(2-x)=0$；② $f(x)-f(-2-x)=0$；③在 $[-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},x\in[-1,0]\\1-x,x\in(0,1]\end{cases}$，则函数 $f(x)$ 与函数 $g(x)=\begin{cases}2^x,x\le 0\\\log_{\frac{1}{2}}x,x>0\end{cases}$ 的图象在区间 $[-3,3]$ 上的交点的个数为6.

11、已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足：$(2a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}a_n-1)=0\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，且 $a_1=a_{10}$，则首项 a_1 所有可能取值中的最大值为__16_____.

12、已知平面上三个不同的**单位向量**$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$，若$\vec{e}$为平面内的任意**单位向量**，则$\left|\vec{a}\cdot\vec{e}\right|+2\left|\vec{b}\cdot\vec{e}\right|+3\left|\vec{c}\cdot\vec{e}\right|$的最大值为_______$\sqrt{21}$__________.

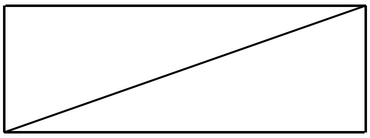
二、选择题(本大题共有 4 小题，满分 20 分) 每小题都给出四个选项，其中有且只有一个选项是正确的，选对得 5 分，否则一律得零分.

13、若复数z满足$\left|z+i\right|+\left|z-i\right|=2$，则复数$z$在复平面上所对应的图形是　（　D　）

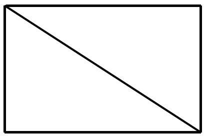
A、椭圆；　　B、双曲线；　　C、直线；　　D、线段.

14、已知长方体切去一个角的几何体直观图如图所示

给出下列 4 个平面图：

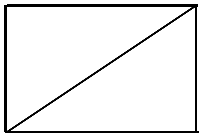


（1）



（2）

（3）



（4）

则该几何体的主视图、俯视图、左视图的序号依次是　（　C　）

A、(1)(3)(4)；　　B、(2)(4)(3)；　　C、(1)(3)(2)；　　D、(2)(4)(1).

15、已知$2\sin x=1+\cos x$，则$\cot\dfrac{x}{2}=$　（　C　）

A、2；　　B、2 或$\dfrac{1}{2}$；　　C、2 或 0；　　D、$\dfrac{1}{2}$或 0.

16、已知等比数列a_1,a_2,a_3,a_4满足$a_1\in(0,1)$，$a_2\in(1,2)$，$a_3\in(2,4)$，则a_4的取值范围是（　D　）

A、$(3,8)$；　　B、$(2,16)$；　　C、$(4,8)$；　　D、$(2\sqrt{2},16)$.

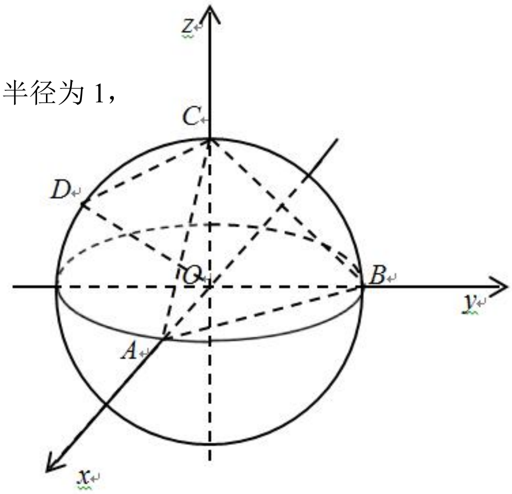
三、解答题（本大题共有 5 小题，满分 76 分）解答下列各题必须写出必要的步骤.

17、（本小题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

如图所示，球 O 的球心 O 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 的原点，半径为 1，

且球 O 分别与 x,y,z 轴的正半轴交于 A,B,C 三点.

已知球面上一点 $D\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.



（1）求 D,C 两点在球 O 上的球面距离；

（2）求直线 CD 与平面 ABC 所成角的大小.

解：（1）由题意：$A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1),D\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

则 $\overrightarrow{CD}=\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$，……………………………………………………2 分

所以 $\left|\overrightarrow{CD}\right|=1$，即 ΔOCD 为等边三角形，所以 $\angle DOC=\frac{\pi}{3}$，…………4 分

则 $\overset{\frown}{DC}=\frac{\pi}{3}\times 1=\frac{\pi}{3}$ ……………………………6 分

（2）设直线 CD 与平面 ABC 所成角为 θ，

易得平面 ABC 的一个法向量 $\vec{n}=(1,1,1)$，…………………………11 分

则 $\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{1\times\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$，…………………………13 分

即直线 CD 与平面 ABC 所成角 $\theta=\arcsin\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ …………………………14 分

18、（**本小题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分**）

某地计划在一处海滩建造一个养殖场.

（1） 如图，射线 OA,OB 为海岸线，$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，现用长度为 1 千米的围网 PQ 依托海岸线围成一个 ΔPOQ 的养殖场，问如何选取点 P,Q，才能使养殖场 ΔPOQ 的面积最大，并求其最大面积.

（2）如图，直线 l 为海岸线，现用长度为 1 千米的围网依托海岸线围成一个养殖场.

方案一：围成三角形 OAB（点 A,B 在直线 l 上），使三角形 OAB 面积最大，设其为 S_1；

方案二：围成弓形 CDE（点 D,E 在直线 l 上，C 是优弧 $\overset{\frown}{DE}$ 所在圆的圆心且 $\angle DCE=\frac{2\pi}{3}$），其面积为 S_2；

试求出 S_1 的最大值和 S_2（均精确到 0.001 平方千米），并指出哪一种设计方案更好.

解：（1）设 $OP=x,OQ=y$

由余弦定理得 $1=x^2+y^2-2xy\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=x^2+y^2+xy\geq 3xy$，$\therefore xy\leq\frac{1}{3}$ …4 分

则 $S=\frac{1}{2}xy\sin\frac{2}{3}\pi\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$，$S_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{12}$（平方千米）

即选取 $OP=OQ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时养殖场 ΔPOQ 的面积最大. …………6 分

（2）方案一：围成三角形OAB

设$\angle AOB=\theta$，由$OA+OB=1\Rightarrow OA\cdot OB\le\left(\dfrac{OA+OB}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，

当且仅当$OA=OB=\dfrac{1}{2}$时取等号.

所以，$S_1=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot1=\dfrac{1}{8}$（平方千米），

当且仅当$OA=OB=\dfrac{1}{2},\theta=\dfrac{\pi}{2}$时取等号.……………9 分

方案二：围成弓形CDE

设弓形中扇形所在圆C的半径为r，而扇形圆心角为$\dfrac{4\pi}{3}$、弧长为 1 千米，

故$r=\dfrac{1}{\frac{4\pi}{3}}=\dfrac{3}{4\pi}$. …………10 分

于是$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot r+\dfrac{1}{2}r^2\sin\dfrac{2\pi}{3}$ …………11 分

$=\dfrac{3}{8\pi}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{16\pi^2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx0.144$（平方千米） …………13 分

即$S_1<S_2$，方案二所围成的养殖场面积较大，方案二更好. ……………14 分

19、（本小题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$，其右顶点为$P$.

（1）求以P为圆心，且与双曲线C的两条渐近线都相切的圆的标准方程；

（2）设直线l过点P，其法向量为$\vec{n}=(1,-1)$，若在双曲线C上恰有三个点P_1,P_2,P_3到直线l的距离均为d，求d的值.

解：（1）由题意，$P(2,0)$，渐近线方程：$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，即$\sqrt{3}x\pm 2y=0$……………2 分

则半径$r=d=\dfrac{\left|2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+4}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$，……………4 分

所以圆方程为：$\left(x-2\right)^2+y^2=\dfrac{12}{7}$……………6 分

（2）若在双曲线C上恰有三个点P_1,P_2,P_3到直线l的距离均为d，则其中一点必定是与直线$l:y=x-2$平行的直线与双曲线其中一支的切点……………8 分

设直线l'与双曲线C相切，并且与直线l平行，则$l^{'}:y=x+b$，即有

$\begin{cases}y=x+b\\3x^2-4y^2=12\end{cases}$，消去$y$，得到$x^2+8bx+12+4b^2=0$……………10 分

则$\Delta=64b^2-16(3+b^2)=0$，解得$b=\pm1$，所以$l^{'}:y=x\pm1$…………12 分

又d是l与$l^{'}$之间的距离，所以$d=\dfrac{\left|1+2\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$或者$d=\dfrac{\left|1-2\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

……………14 分

20、（本小题满分 16 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分）

若数列$\{A_n\}$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$A_{n+1}=A_n{}^k\left(k\neq 0\right)$，且$A_n\neq 0$，

则称数列$\{A_n\}$为“k级创新数列”．

（1）已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n{}^2+2a_n$，且$a_1=\dfrac{1}{2}$，试判断数列$\{2a_n+1\}$是否为“2 级创新数列”，并说明理由；

（2） 已知正数数列$\{b_n\}$为“k级创新数列”且$k\neq 1$，若$b_1=10$，求数列$\{b_n\}$的前n项积T_n；

（3）设α,β是方程$x^2-x-1=0$的两个实根（$\alpha>\beta$），令$k=\dfrac{\beta}{\alpha}$，在（2）的条件下，记数列$\{c_n\}$的通项$c_n=\beta^{n-1}\cdot\log_{b_n}T_n$， 求证：$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

解：（1）由$a_{n+1}=2a_n{}^2+2a_n$，$\therefore 2a_{n+1}+1=4a_n{}^2+4a_n+1$，即$2a_{n+1}+1=\left(2a_n+1\right)^2$，

……………………2 分

且$2a_1+1=2\neq 0$，　　……………………3 分

$\therefore\{2a_n+1\}$是“2 级创新数列”　　……………………4 分

（2）由正数数列$\{b_n\}$是“k级创新数列”，得$b_{n+1}=b_n{}^k\left(k\neq 0,1\right)$，且$b_n>0$

$\therefore \lg b_{n+1}=k\lg b_n$，　　……………………6 分

$\therefore\{\lg b_n\}$是等比数列，且首项$\lg b_1=1$，公比$q=k$；

$\therefore \lg b_n=\lg b_1\cdot q^{n-1}=k^{n-1}$；　　……………………7 分

由$T_n=b_1b_2\cdots b_n\Rightarrow \lg T_n=\lg b_1+\lg b_2+\cdots+\lg b_n$ ……………………9 分

$=1+k+k^2+\cdots+k^{n-1}=\dfrac{1-k^n}{1-k}$，$\therefore T_n=10^{\frac{1-k^n}{1-k}}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$……………………10 分

（3）由$k=\dfrac{\beta}{\alpha}$，$c_n=\beta^{n-1}\log_{b_n}T_n=\beta^{n-1}\dfrac{\lg T_n}{\lg b_n}=\beta^{n-1}\dfrac{\frac{1-k^n}{1-k}}{k^{n-1}}$

$$=\beta^{n-1}\frac{1-k^n}{k^{n-1}-k^n}=\frac{\beta^{n-1}\left[1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right]}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta};$$ ……………………12 分

由α,β是方程$x^2-x-1=0$的两根，$\therefore\begin{cases}\alpha^2=\alpha+1\\ \beta^2=\beta+1\end{cases}$； ……………………14 分

$$\therefore c_{n+1}+c_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}+\alpha^n-\beta^n\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\alpha^n\left(\alpha+1\right)-\beta^n\left(\beta+1\right)\right]=\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=c_{n+2}.$$ ……………………16 分

21、（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

对于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $g(x)$，若函数 $\sin\left[g(x)\right]$ 是奇函数，则称 $g(x)$ 为正弦奇函数.

已知 $f(x)$ 是单调递增的正弦奇函数，其值域为 $\mathbf{R}$，$f(0)=0$.

（1）已知 $g(x)$ 是正弦奇函数，证明："u_0 为方程 $\sin\left[g(x)\right]=1$ 的解"的充要条件是 "$-u_0$ 为方程 $\sin\left[g(x)\right]=-1$ 的解"；

（2）若 $f(a)=\frac{\pi}{2}, f(b)=-\frac{\pi}{2}$，求 $a+b$ 的值；

（3）证明：$f(x)$ 是奇函数.

证明：（1） 必要性：

u_0 为方程 $\sin\left[g(x)\right]=1$ 的解，即 $\sin\left[g(u_0)\right]=1$，故 $\sin\left[g(-u_0)\right]=-\sin\left[g(u_0)\right]=-1$，

即 $-u_0$ 为方程 $\sin\left[g(x)\right]=-1$ 的解.……………………………………………………2 分

充分性：

$-u_0$ 为方程 $\sin\left[g(x)\right]=-1$ 的解，即 $\sin\left[g(-u_0)\right]=-1$，故 $-\sin\left[g(u_0)\right]=-1$，

$\sin\left[g(u_0)\right]=1$，即 u_0 为方程 $\sin\left[g(x)\right]=1$ 的解. ………………………………4 分

（2）因为 $f(b)<f(0)<f(a)$，由 $f(x)$ 单调递增，可知 $b<0<a$. ……………………5 分

由（1）可知，若函数 $f(x)$ 是正弦奇函数，

则当 a 为方程 $\sin\left[f(x)\right]=1$ 的解，必有 $-a$ 为方程 $\sin\left[f(x)\right]=-1$ 的解，

$\therefore \sin\left[f(-a)\right]=-1$，即 $f(-a)=2m\pi-\frac{\pi}{2}\ (m\in\mathbf{Z})$，

而 $-a<0$，故 $f(-a)<f(0)=0$，从而 $f(-a)\le-\frac{\pi}{2}=f(b)\Rightarrow -a\le b$，

即 $a+b\ge0$； ……………………7 分

同理 $f(-b)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\ (n\in\mathbf{Z}), f(-b)>f(0)$，故 $f(-b)\ge\frac{\pi}{2}=f(a)\Rightarrow -b\ge a$，

即 $a+b\le0$； ……………………………9 分

综上，$a+b=0$. ……………………………10 分

（3） $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 且单调递增，故对任意 $c\in\mathbf{R}$ ，存在唯一的 x_0, 使得 $f(x_0)=c$.

…………11 分

可设 $f(a_n)=n\pi-\frac{\pi}{2}, f(b_n)=-\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ ，下证 $a_n+b_n=0\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

当 $n=1$ 时，由（2）知 $a_1+b_1=0$,命题成立； ……………………………………12 分

假设 $n\le k$ 时命题成立，即 $a_1+b_1=0,\cdots,a_k+b_k=0$ ，而由 $f(x)$ 的单调性

知 $b_{k+1}<b_k<\cdots<b_1<0<a_1<\cdots<a_k<a_{k+1}$ ，知 $-a_{k+1}<b_k, -b_{k+1}>a_k$ ，

则当 $n=k+1$ 时， a_{k+1} 为方程 $\sin f(x)=\pm1$ 的解，故 $-a_{k+1}$ 为方程 $\sin f(x)=\mp1$ 的解，

且由单调性知 $f(-a_{k+1})<f(b_k)$ ，故 $f(-a_{k+1})\le f(b_{k+1})$ ，得 $-a_{k+1}\le b_{k+1}$ ；

同理 $-b_{k+1}\ge a_{k+1}$ ，故 $a_{k+1}+b_{k+1}=0$. ……………………………………………14 分

要证 $f(x)$ 是奇函数，只需证：对任意 $x>0$ ，都有 $f(-x)=-f(x)$.

记 $a_0=b_0=0$ ，若 $x=a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ ，则 $-x=b_n$ ， $f(-x)=-\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-f(a_n)=-f(x)$ ；

……………………………………………………15 分

若 $x\in\left(a_{2n},a_{2n+1}\right)(n\in\mathbf{N})$ ，则 $f(x)\in\left(2n\pi-\frac{\pi}{2},2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,

$-f(x)\in\left(-\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right),-\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ， $-x\in\left(b_{2n+1},b_{2n}\right), f(-x)\in\left(-\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right),-\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ，

而正弦函数在 $\left(-\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right),-\left(2n\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 上单调递增，

故由 $\sin f(-x)=-\sin f(x)=\sin(-f(x))$ 得 $f(-x)=-f(x)$.

若 $x\in\left(a_{2n+1},a_{2n+2}\right)(n\in\mathbf{N})$ ，同理可证得 $f(-x)=-f(x)$. ……………………17 分

综上，对任意 $x>0$ ，都有 $f(-x)=-f(x)$.故 $f(x)$ 是奇函数. ……………18 分