高一数学第三章章末检测第 3 章　三角恒等变换(B)

(时间：120 分钟　满分：160 分)

一、填空题(本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分)

1．函数$f(x)=\sin^2(2x-\frac{\pi}{4})$的最小正周期是______.

2．$\sin 15°\cos 75°+\cos 15°\sin 105°=$________.

3．已知$\alpha\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=$__________.

4．函数$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x(x\in[-\pi，0])$的单调递增区间是________.

5．化简：$\frac{\sin(60°+\theta)+\cos 120°\sin\theta}{\cos\theta}$的结果为______.

6．已知$\sin\alpha\cos\beta=1$，则$\sin(\alpha-\beta)=$________.

7．若函数$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})+a\sin(x-\frac{\pi}{6})$的一条对称轴方程为$x=\frac{\pi}{2}$，则$a=$________.

8．函数$y=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2x$，$x\in\mathbf{R}$的值域是______.

9．若$3\sin\theta=\cos\theta$，则$\cos 2\theta+\sin 2\theta$的值等于______.

10．已知$3\cos(2\alpha+\beta)+5\cos\beta=0$，则$\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha$的值为________.

11．若$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$，$\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{4}{5}$，则角$\theta$的终边一定落在直线________上.

12．若$0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且$\cos\beta=-\frac{1}{3}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，则$\cos\alpha=$________.

13．函数$y=\sin(x+10°)+\cos(x+40°)$，$(x\in\mathbf{R})$的最大值是________.

14．使奇函数$f(x)=\sin(2x+\theta)+\sqrt{3}\cos(2x+\theta)$在$[-\frac{\pi}{4}，0]$上为减函数的所有$\theta$的集合为______.

二、解答题(本大题共 6 小题，共 90 分)

15．(14 分)已知$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in(0，\pi)$.

(1)求$\frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})-\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)+\cos(3\pi+\alpha)}$的值；

(2)求$\cos(2\alpha-\frac{3\pi}{4})$的值.

16．(14 分)已知函数$f(x)=2\cos x\sin x+2\sqrt{3}\cos^2x-\sqrt{3}$.

(1)求函数$f(x)$的最小正周期；

(2)求函数$f(x)$的最大值和最小值及相应的x的值；

(3)求函数$f(x)$的单调增区间.

17．(14 分)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\dfrac{3x}{2}，\sin\dfrac{3x}{2})$，$\boldsymbol{b}=(\cos\dfrac{x}{2}，-\sin\dfrac{x}{2})$，且 $x\in[-\dfrac{\pi}{3}，\dfrac{\pi}{4}]$.

(1)求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

(2)若 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，求 $f(x)$的最大值和最小值.

18．(16 分)已知△ABC 的内角 B 满足 $2\cos 2B-8\cos B+5=0$，若$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-9$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\theta$为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(1)求角 B；

(2)求 $\sin(B+\theta)$.

19．(16 分)已知向量 $\boldsymbol{m}=(-1，\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x)$，$\boldsymbol{n}=(f(x)，\cos\omega x)$，其中$\omega>0$，且 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，又函数 $f(x)$的图象任意两相邻对称轴的间距为$\dfrac{3\pi}{2}$.

(1)求ω的值；

(2)设α是第一象限角，且 $f(\dfrac{3}{2}\alpha+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{23}{26}$，求$\dfrac{\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})}{\cos(4\pi+2\alpha)}$的值.

20．(16 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x\sin\varphi+\cos^2x\cos\varphi-\dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{\pi}{2}+\varphi)(0<\varphi<\pi)$，其图象过点$(\dfrac{\pi}{6}，\dfrac{1}{2})$.

(1)求φ的值；

(2)将函数 $y=f(x)$的图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$的图象，求函数 $g(x)$在$[0，\frac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值.

第 3 章　三角恒等变换(B)

1.$\frac{\pi}{2}$

解析　$\because f(x)=\frac{1}{2}[1-\cos(4x-\frac{\pi}{2})]$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 4x$

$\therefore T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

2．1

解析　原式$=\sin 15°\cos 75°+\cos 15°\sin 75°=\sin 90°=1$.

3.$\frac{1}{7}$

解析　$\because \alpha\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$，$\sin \alpha=\frac{3}{5}$,

$\therefore \cos \alpha=-\frac{4}{5}$,

$\tan \alpha=\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}=-\frac{3}{4}$.

$\therefore \tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}$.

4．$[-\frac{\pi}{6}，0]$

解析　$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

得 $2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,

令 $k=0$ 得$-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$.

由此可得$[-\frac{\pi}{6}，0]$符合题意.

5.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析　原式$=\frac{\sin 60°\cos\theta+\cos 60°\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\sin 60°\cos\theta}{\cos\theta}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6．1

解析　$\because \sin\alpha\cos\beta=1$，

$\therefore \sin\alpha=\cos\beta=1$，或 $\sin\alpha=\cos\beta=-1$，

$\therefore \cos\alpha=\sin\beta=0$.

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta=1$.

7.$\sqrt{3}$

解析　$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})-a\sin(\frac{\pi}{6}-x)$

$=\sin(x+\frac{\pi}{3})-a\cos(\frac{\pi}{3}+x)$

$=\sqrt{1+a^2}\sin(x+\frac{\pi}{3}-\varphi)$

$\therefore f(\frac{\pi}{2})=\sin\ \frac{5\pi}{6}+a\sin\ \frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}=\sqrt{1+a^2}$.

解得 $a=\sqrt{3}$.

8.$\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2},\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

解析　$y=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2x=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$,

$\because x\in\mathbf{R}$,

$\therefore -1\leqslant\sin(2x-\frac{\pi}{4})\leqslant 1$,

$\therefore y\in[-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}]$.

9.$\frac{7}{5}$

解析　$\because 3\sin\theta=\cos\theta$，$\therefore \tan\theta=\frac{1}{3}$.

$\cos 2\theta+\sin 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=\frac{\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$=\frac{1+2\tan\theta-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1+2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{7}{5}$.

10．-4

解析　$3\cos(2\alpha+\beta)+5\cos\beta$

$=3\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha+5\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+5\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=0$,

$\therefore 2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-8\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$,

$\therefore \tan(\alpha+\beta)\tan\alpha=-4$.

11．$24x-7y=0$

解析　$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$，$\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{4}{5}$，$\tan\frac{\theta}{2}=-\frac{4}{3}$,

$$\therefore \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}}=\frac{24}{7}.$$

$\therefore$ 角θ的终边在直线 $24x-7y=0$ 上.

12.$\frac{4\sqrt{2}}{9}$

解析　$\cos\beta=-\frac{1}{3}$，$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

故 $\cos\alpha=\cos[(\alpha+\beta)-\beta]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$

$=(-\frac{2\sqrt{2}}{3})\times(-\frac{1}{3})+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

13．1

解析　令 $x+10°=\alpha$，则 $x+40°=\alpha+30°$,

$\therefore y=\sin\alpha+\cos(\alpha+30°)$

$=\sin\alpha+\cos\alpha\cos\ 30°-\sin\alpha\sin 30°$

$=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$

$=\sin(\alpha+60°)$.

$\therefore y_{\max}=1$.

14.$\left\{\theta|\theta=2k\pi+\frac{2\pi}{3}，k\in\mathbf{Z}\right\}$

解析　$\because f(x)$为奇函数，$\therefore f(0)=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=0$.

$\therefore \tan\theta=-\sqrt{3}$.$\therefore \theta=k\pi-\frac{\pi}{3}$，$(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\theta+\frac{\pi}{3})$

$=2\sin(2x+k\pi)$.

当 k 为偶数时，$f(x)=2\sin 2x$，不合题意；

当 k 为奇数时，$f(x)=-2\sin 2x$,

函数在$\left[-\frac{\pi}{4}，0\right]$上为减函数.

$\therefore f(x)=-2\sin 2x$，$\therefore \theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

15．**解**　(1)$\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in(0，\pi)$

$\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in(0，\pi)\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$\frac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})-\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)+\cos(3\pi+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=-\frac{1}{3}.$$

(2)$\because \cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$,

$\cos 2\alpha=-\frac{3}{5}$.

$\cos(2\alpha-\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

16．**解**　(1)原式$=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x)$

$=2(\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3})$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

∴函数$f(x)$的最小正周期为π.

(2)当$2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即$x=k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$有最大值为 2.

当$2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，即$x=k\pi-\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$有最小值为$-2$.

(3)要使$f(x)$递增，必须使$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

解得$k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.

∴函数$f(x)$的递增区间为$[k\pi-\frac{5\pi}{12},\ k\pi+\frac{\pi}{12}](k\in\mathbf{Z})$.

17．**解**　(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=\cos 2x$，

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2+(\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2})^2}$

$=\sqrt{2+2\cos 2x}=2|\cos x|$，

∵$x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$，∴$\cos x>0$，

∴$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\cos x$.

(2)$f(x)=\cos 2x-2\cos x=2\cos^2x-2\cos x-1$

$=2(\cos x-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}$.

∵$x\in[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$. ∴$\frac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant 1$，

∴当$\cos x=\frac{1}{2}$时，$f(x)$取得最小值$-\frac{3}{2}$；当$\cos x=1$时，$f(x)$取得最大值-1.

18．**解**　(1)$2(2\cos^2B-1)-8\cos B+5=0$，即$4\cos^2B-8\cos B+3=0$，得$\cos B=\frac{1}{2}$.

又B为$\triangle ABC$的内角，∴$B=60°$.

(2)∵$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=-\frac{3}{5}$，

∴$\sin\theta=\frac{4}{5}$.

∴$\sin(B+\theta)=\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

19．**解**　(1)由题意，得$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，所以

$f(x)=\cos\omega x\cdot(\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x)=\frac{1+\cos 2\omega x}{2}+\frac{\sqrt{3}\sin 2\omega x}{2}=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

根据题意知，函数$f(x)$的最小正周期为 3π.

又$\omega>0$，所以$\omega=\frac{1}{3}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\sin(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$，所以 $f(\frac{3}{2}\alpha+\frac{\pi}{2})=\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}=\cos\alpha+\frac{1}{2}=\frac{23}{26}$.

解得 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$.

因为α是第一象限角，故 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

所以$\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\cos(4\pi+2\alpha)}=\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\cos 2\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}=-\frac{13\sqrt{2}}{14}$.

20．**解**　(1)因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\sin\varphi+\cos^2x\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\varphi)(0<\varphi<\pi)$，

所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\sin\varphi+\frac{1+\cos 2x}{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}\cos\varphi$

$=\frac{1}{2}\sin 2x\sin\varphi+\frac{1}{2}\cos 2x\cos\varphi$

$=\frac{1}{2}(\sin 2x\sin\varphi+\cos 2x\cos\varphi)$

$=\frac{1}{2}\cos(2x-\varphi)$.

又函数图象过点$(\frac{\pi}{6},\ \frac{1}{2})$，所以$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos(2\times\frac{\pi}{6}-\varphi)$，

即 $\cos(\frac{\pi}{3}-\varphi)=1$，

又 $0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\frac{1}{2}\cos(2x-\frac{\pi}{3})$，将函数 $y=f(x)$的图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$的图象，可知 $g(x)=f(2x)=\frac{1}{2}\cos(4x-\frac{\pi}{3})$，

因为 $x\in[0,\ \frac{\pi}{4}]$，所以 $4x\in[0,\ \pi]$，

因此 $4x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}]$，

故$-\frac{1}{2}\leqslant\cos(4x-\frac{\pi}{3})\leqslant 1$.

所以 $y=g(x)$在$[0,\ \frac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值分别为$\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{4}$.