

---

## 题型练 3 大题专项(一)

### 三角函数、解三角形综合问题

1. 已知函数  $f(x) = \sin x - 2\sin^2 x$ .

(1) 求  $f(x)$  的最小正周期;

(2) 求  $f(x)$  在区间上的最小值.

2. 在  $\triangle ABC$  中,  $AC=6, \cos B = \frac{1}{2}, C = \frac{\pi}{3}$ .

(1) 求  $AB$  的长;

(2) 求  $\cos A$  的值.

---

3. 在 $\triangle ABC$ 中,角 $A, B, C$ 所对的边分别是 $a, b, c$ ,且.

(1) 证明: $\sin A \sin B = \sin C$ ;

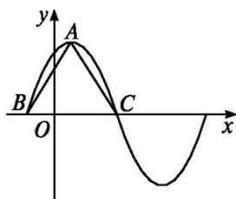
(2) 若 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ ,求 $\tan B$ .

4. (2017 北京,文 16) 已知函数 $f(x) = \cos x - 2 \sin x \cos x$ .

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求证:当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x) \geq -\frac{1}{2}$ .

5. 已知函数 $f(x) = a \cos^2 \omega x + a \sin \omega x - a$  ( $\omega > 0, a > 0$ ) 在一个周期内的图象如图所示,其中点 $A$ 为图象上的最高点,点 $B, C$ 为图象与 $x$ 轴的两个相邻交点,且 $\triangle ABC$ 是边长为4的正三角形.



- (1)求 $\omega$ 与 $a$ 的值;  
 (2)若 $f(x_0)=\frac{1}{2}$ ,且 $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,求 $f(x_0+1)$ 的值.

6.在平面直角坐标系 $xOy$ 中,已知向量 $\mathbf{m}=(\sin x, \cos x)$ , $\mathbf{n}=(\cos x, \sin x)$ , $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

- (1)若 $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ ,求 $\tan x$ 的值;  
 (2)若 $\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ ,求 $x$ 的值.

##

### 题型练 3 大题专项(一)

#### 三角函数、解三角形综合问题

- 1.解 (1)因为 $f(x)=\sin x+\cos x$   
 $=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ ,  
 所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $2\pi$ .  
 (2)因为 $0 \leq x \leq \pi$ ,所以 $\frac{\pi}{4} \leq x+\frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$ .  
 当 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$ ,即 $x=\frac{5\pi}{4}$ 时, $f(x)$ 取得最小值.  
 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最小值为 $-\sqrt{2}$ .

2.解 (1)因为  $\cos B = \frac{1}{2}, 0 < B < \pi$ ,

所以  $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

由正弦定理知,

所以  $AB = 5$ .

(2)在  $\triangle ABC$  中,  $A+B+C=\pi$ , 所以  $A=\pi-(B+C)$ ,

于是  $\cos A = -\cos(B+C) = -\cos B \cos C + \sin B \sin C$ ,

又  $\cos B = \frac{1}{2}, \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

故  $\cos A = -\frac{1}{2}$ .

因为  $0 < A < \pi$ , 所以  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

因此,  $\cos C = \cos A \cos B + \sin A \sin B = \frac{1}{2}$ .

3.(1)证明 根据正弦定理, 可设  $a=k(k>0)$ .

则  $a=k\sin A, b=k\sin B, c=k\sin C$ .

代入中, 有,

变形可得  $\sin A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B =$

$\sin(A+B)$ .

在  $\triangle ABC$  中, 由  $A+B+C=\pi$ , 有  $\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$ , 所以  $\sin A \sin B = \sin C$ .

(2)解 由已知,  $b^2+c^2-a^2=bc$ ,

根据余弦定理, 有  $\cos A = \frac{1}{2}$ .

所以  $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

由(1),  $\sin A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ,

所以  $\sin B = \cos B + \sin B$ ,

故  $\tan B = 4$ .

4.(1)解  $f(x) = \cos 2x + \sin 2x - \sin 2x$

$= \sin 2x + \cos 2x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ .

所以  $f(x)$  的最小正周期  $T = \pi$ .

(2)证明 因为  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,

所以  $-\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$ .

所以  $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) \geq \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

所以当  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  时,  $f(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

5.解 (1)由已知可得  $f(x) = a = a \sin x, \therefore BC = 4, \therefore T = 8, \therefore \omega = \frac{\pi}{4}$ ,

由题中图象可知, 正三角形  $ABC$  的高即为函数  $f(x)$  的最大值  $a$ , 得  $a = BC = 4$ .

(2)由(1)知  $f(x) = 4 \sin(\frac{\pi}{4}x)$ ,

即  $f(x) = 4 \sin(\frac{\pi}{4}x)$ .

$\therefore x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \therefore x_0 + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ ,

$\therefore \cos(x_0 + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$\therefore f(x_0 + 1) = 4 \sin(\frac{\pi}{4}(x_0 + 1)) = 4 \sin(\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{4})$

$= 4 \sin(\frac{\pi}{4}x_0) \cos \frac{\pi}{4} + 4 \cos(\frac{\pi}{4}x_0) \sin \frac{\pi}{4}$

$= 2 \sin(\frac{\pi}{4}x_0) + 2 \cos(\frac{\pi}{4}x_0)$

$= 2 \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4}x_0 + \frac{\pi}{4}) = 2 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$ .

6.解 (1)  $\therefore \mathbf{m} = (\sin x, \cos x), \mathbf{n} = (\cos x, \sin x)$ , 且  $\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$ ,

$\therefore \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = (\sin x, \cos x) \cdot (\cos x, \sin x)$

$= \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x = 0$ .

又  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,

$\therefore \sin 2x = 0$ , 即  $2x = 0$ ,  $\therefore \tan x = \tan 0 = 0$ .

---

(2)由(1)和已知得  $\cos$

=

= $\sin$ ,

又  $x$ ,  $\therefore x$ , 即  $x$ .