

2015—2016 学年度下学期期中阶段测试

高二理科数学试卷

考试时间：120 分钟 试题满分：150 分

一. 选择题（共 12 个小题，每小题 5 分，在每个小题的四个选项中，只有一个是符合要求的.）

1. a 是实数，则复数 $\frac{\sqrt{a+i}}{1-\sqrt{ai}}$ = ()

- A. i B. $a-i$ C. $-i$ D. $a+i$

2. 关于复数 z 的方程 $|z+1+i| - |z-2-3i| = 5$ 在复平面上表示的图形是 ()

- A. 一条射线 B. 双曲线 C. 双曲线的一支 D. 两条射线

3. 若 $f'(x_0) = -4$ ，则 $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2k) - f(x_0)}{k}$ 等于 ()

- A. -8 B. -2 C. 8 D. 2

4. 下列关于复数的运算中，错误的是 ()

A. $(1+i)^{200} = 2^{100}$ B. $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 是 $x^3 + 1 = 0$ 的根

C. $\frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ D. $(\cos A + i \sin A)^3 = \cos 3A + i \sin 3A$

5. 下面几种推理过程是演绎推理的是 ()

- A. 两条直线平行，同旁内角互补，如果 $\angle A$ 和 $\angle B$ 是两条平行直线的同旁内角，则 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ；
B. 由平面三角形的性质，推测空间四面体的性质；
C. $f(n) = n^2 + n + 41$ ，经计算可知 $f(1), f(2), f(3) \cdots f(10)$ 都是质数，由此推断 $f(n) (n \in N^+)$ 都是质数；
D. 高二共有 6 个班，人数分别为 45、46、42、44、47、45，由此推测高二各班都不超过 50 人。

6. $(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中，只有第 6 项的二项式系数最大，则展开式中常数项为

- A. $\frac{105}{8}$ B. $\frac{105}{32}$ C. $\frac{45}{4}$ D. $\frac{45}{8}$

7. 已知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(\cos x)]^2 - [f(\cos x_0)]^2}{x - x_0} = (\quad)$

- A. $-2f(\cos x_0)f'(\sin x_0)\sin x_0$ B. $-2f'(\cos x_0)\sin x_0$
 C. $-2f(\cos x_0)\sin x_0$ D. $-2f(\cos x_0)f'(\cos x_0)\sin x_0$

8. 弹簧在拉伸过程中, 力与伸长量成正比, 即力 $F(x) = kx$ (k 是常数, x 是伸长量), 把弹簧从平衡位置 O 拉长 a 到 A , 再从 A 继续拉长 b 到 B , 从 A 到 B 力所做的功为 ()

- A. $k(b^2 + a^2)$ B. $\frac{k}{2}(b^2 + 2ab)$ C. $\frac{k}{2}(b^2 - a^2)$ D. $k(a^2 + 2ab)$

9. $\int_0^2 (\sqrt{4-x^2} - x) dx - \int_{-1}^1 \tan x dx$ 的值为 ()

- A. $\pi - 2$ B. $2\pi + 3$ C. $\frac{\pi}{2} + 2\cot 1 - 2$ D. $\pi + 2\cot 1 - 2$

10. 若不等式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{a}{12}$ 对于大于 1 的一切自然数 n 都成立, 则实数 a 的最大值是 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

11. 下列排列数、组合数的计算中错误的是 ()

- A. $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ B. $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_{20}^2 = 1330$
 C. $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$ D. $A_m^m + A_{m+1}^m + A_{m+2}^m + \dots + A_{2m}^m = A_{2m+1}^{m+1}$

12. 偶函数 $f(x)$ 定义在 $(-1,0) \cup (0,1)$ 上, 且 $f(\frac{1}{2}) = 0$, 当 $x > 0$ 时, 式子 $(\frac{4}{x} - x)f'(x)\ln(4-x^2) < 2f(x)$ 恒成立, 则 $f(2-x) < 0$ 的解集为 ()

- A. $(-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ B. $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$
 C. $(\frac{5}{2}, 3) \cup (1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 2) \cup (2, \frac{5}{2})$

二. 填空题 (共 4 个小题, 每小题 5 分.)

13. 现有 10 个完全相同的小球放入 A, B, C, D 4 个不同的盒子里, 每个盒子至少放一个小球, 不同的放法共有 _____ 种;

14. 函数 $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-7)$ 的图像在点 $P(3, f(3))$ 处的切线方程为 _____;

15. 有甲乙丙三项任务，甲需要 3 人承担，乙、丙各需要 2 人承担，从 8 个人中选 7 个人承担这三项任务，不同的安排方法有_____种。

16. 已知函数 $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2017}}{2017}$ ，设 $F(x) = 3f(x-4)$ ，且 $F(x)$ 的零点均在 $[a, b]$ ($a < b, a, b \in Z$) 内，则 $\int_a^b |\sin \pi x| dx$ 的最小值为_____

三. 解答题 (共计 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本题 10 分) 设命题 p : 复数 $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 - a(1-2i) + i$ 对应的点在第二象限;

命题 q : 不等式 $|a-2| \geq \sin x$ 对于 $x \in R$ 恒成立;

如果 “ p 且 q ” 为假命题，“ p 或 q ” 为真命题，求实数 a 的取值范围。

18. (本题 12 分) 有 6 名师范毕业生要到甲、乙、丙三所学校任教，其中 2 人教数学，2 人教物理，2 人教英语，按照下列分配方式，分别有多少种不同的分配方法?

- (1) 甲校要一人，乙校要二人，丙校要三人;
- (2) 甲、乙、丙三所学校都要二人;
- (3) 甲校在三个学科中各要一人，其余三人到乙、丙两所学校，每所学校至少一人.
- (4) 甲、乙、丙每所学校都至少要一人;

19. (本题 12 分) 已知 $(2x-5y)^{10} = a_0x^{10} + a_1x^9y + a_2x^8y^2 + \dots + a_{10}y^{10}$ ，求:

- (1) 各项系数之和; (2) 系数绝对值的和; (3) 所有偶数项的二项式系数之和;
- (4) 所有奇数项的系数之和.

20. (本题 12 分) 试比较 $3^n - 2^n$ 与 $(n-2)2^n + 2n^2$ 的大小, 并用数学归纳法证明.

21. (本题 12 分) (1) 求证: 函数 $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ 的值恒为正数;

(2) 已知 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $2 < x < y$, 求证: $(1+x)^y > (1+y)^x$

22 (本题 12 分). 已知函数 $f(x) = ax - a \ln x - 3 (a \neq 0)$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) + (1-a)x + 4 - e \leq 0$ 对任意的 $x \in [e, e^2]$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 求证: $\ln(2^3 + 1) + \ln(3^3 + 1) + \ln(4^3 + 1) + \cdots + \ln(n^3 + 1) < \frac{1}{4} + 3 \ln n! (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$