不等式证明中的一题多解的教学反思

在高三深入课堂研究中，我上了一节“不等式证明中的一题多解”的研讨课，下面谈一下在备课、上课及课后的一些感受。

一、课前备课

高三的一轮复习是关键的一环，要给学生以怎样的要求和习惯的养成，必须要有一个方向。我的思路是在复习旧知识的同时，要求学生掌握除了知识之外的做题方法和做题技巧以及涉及到的数学思想，例如：数形结合、函数与方程的思想、转化的思想等等。提倡发散性思维和聚合式思维。因此，在高三数学组讨论下准备上一节，发散的课——不等式证明中的一题多解。在考虑到学生对不等式的证明方法都已掌握的情况下，为了把握好与高考结合、与教材结合、讲练结合。我设计了由高考题开始引入。因此，我给出了2007年辽宁省高考题：已知函数，

$$f(x)=e^{2x}-2t(e^{x}+x)+x^{2}+2t^{2}+1$$

（III）证明：$f(x)\geq\dfrac{3}{2}$

通过对高考试题的解答分析，渗透一个理念。高考试题的解答往往采用的多种角度，但通常给出的答案以通解通法为主。这就要求我们在掌握通解通法的过程中寻求发散。找到适合该题的多种解法，发散自己的思维。

在这个基础上，我设计了一些课本中的试题，以及课本试题的一些改编的小题。要求学生进行独立的解答。在课堂上允许同学之间讨论。互相促进思维的发散。

二、上课过程中

下午，第一节。我开始上课，在引课的过程中，学生表现出了对高考试题的重视。由此，激发他们（她们）去发散的激情。在试题练习的过程中，学生比较投入。这个过程，对于第一个试题，我要求学生进行板演。并进行试题的讲解。他们的方法多样，并且有出乎想象的地方。其中，有一个同学用的是柯西不等式，简洁明了。在他给出柯西不等式的简单说明后，进行了运用，真是水到渠成。我惊问，你怎么想到了柯西不等式呢？这个是我们没有学到的。他回答道：我比较喜欢不等式选修教材。自己学习了一下。我给出了肯定，并指出在教材中没有出现的定理和公式必须给出证明才可以应用。但，对他的自学给予鼓励。学习就是要这样，不断的去探索和钻研。同学们给了他热烈的掌声。这个是在预设之外的。在评价学生们不同方法的同时，指出了他们应该注意的地方和书写不规范的地方，并对好的给予了肯定。并且我对试题给出了一定的引申以此与高考试题协调。例题和解法如下：

问题与练习一、设$a,b\in R$，且$a+b=1$，求证：$(a+2)^{2}+(b+2)^{2}\geq\dfrac{25}{2}$

解：方法一：函数法：$b=1-a$

则左边=$(a+2)^2+(3-a)^2=2a^2-2a+13=2(a-\frac{1}{2})^2+\frac{25}{2}$

所以，左边$\geq\frac{25}{2}$=右边。当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时，取“=”

方法二：（综合法）构造均值条件：（一）由$a+b=1$可得$(a+2)+(b+2)=5$

所以，$(a+2)^2+(b+2)^2\geq\frac{[(a+2)+(b+2)]^2}{2}=\frac{25}{2}$

当且仅当$a+2=b+2=\frac{5}{2}$即$a=b=\frac{1}{2}$时，取“=”。

（二）$\because\begin{matrix}(a+2)^2+\frac{25}{4}\geq5(a+2)\\(b+2)^2+\frac{25}{4}\geq5(b+2)\end{matrix}$ $\therefore(a+2)^2+\frac{25}{4}+(b+2)^2+\frac{25}{4}\geq5(a+b+4)$

即$(a+2)^2+(b+2)^2\geq\frac{25}{2}$，当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时，取“=”

方法三：等量代换：设$a=\frac{1}{2}+t,b=\frac{1}{2}-t$。代入$(a+2)^2+(b+2)^2$中可得：

$(a+2)^2+(b+2)^2=(\frac{5}{2}+t)^2+(\frac{5}{2}-t)^2=\frac{25}{2}+2t^2\geq\frac{25}{2}$

当且仅当$t=0$时，即$a=b=\frac{1}{2}$时，取“=”

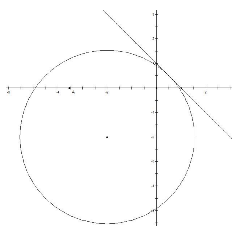
方法四：几何意义：$(a+2)^2+(b+2)^2$表示的几何意义是：$A(a,b),B(-2,-2)$两点间距离的平方.

而(a,b)满足：$a+b=1$即在$a+b=1$的直线上。

易知，$(a+2)^2+(b+2)^2\geq[\frac{|-2+(-2)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}]^2=\frac{25}{2}$即垂线段最短。当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时，取“=”。

方法五：几何关系：设$(a+2)^2+(b+2)^2=R^2$则当直线$a+b=1$与圆$(a+2)^2+(b+2)^2=R^2$相切时，最小。

$(a+2)^2+(b+2)^2\geq[\frac{|-2+(-2)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}]^2=\frac{25}{2}$如图：



引申：$y=(a-x)^2+(1-a-\frac{4}{x})^2\geq\frac{25}{2}$与2007年辽宁省高考题对应。从而让学生体验到小题也是很有用处的。能够折射到高考试题。

（补充解法六：柯西不等式解法：

已知$a_i \in R^+, b_i \in R^+, i = 1,2,\ldots,\cdot n$则：

$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots + b_n{}^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_ib_i + \ldots + a_nb_n)^2$，、

当且仅当$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$时，取等号。

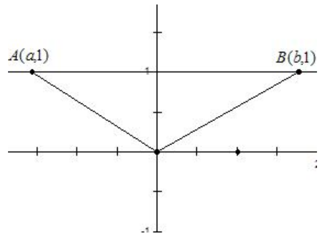
应用：$\because [(a+2)^2 + (b+2)^2](1^2 + 1^2) \geq [(a+2)\cdot 1 + (b+2)\cdot 1]^2$

$\therefore (a+2)^2 + (b+2)^2 \geq \frac{25}{2}$当且仅当$a = b = \frac{1}{2}$时，取等号。）

问题与练习二、已知函数$f(x) = \sqrt{1+x^2}$，求证：$|f(a) - f(b)| < |a - b|$,其中$(a \neq b)$

解：方法一：中值定理：$|f(a) - f(b)| < |a - b|, \Leftrightarrow |f'(x)| < 1$

所以，即证：$f'(x) = \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| < 1$，而这个是比较容易的。

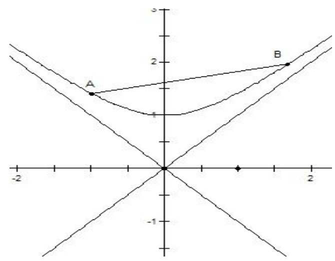


方法二：几何意义：如图：
两边之差小于第三边。

方法三：做商（分子有理化）：$|f(a) - f(b)| < |a - b|, \Leftrightarrow \left|\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right| < 1$

而$\left|\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right| = \left|\frac{\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1+b^2}}{a - b}\right| = \left|\frac{a + b}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}}\right| < 1$所以，命题成立。

$|a + b| \leq |a| + |b| < \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}$



方法四：$y = \sqrt{1+x^2}$为双曲线$y^2 - x^2 = 1$上半部分。渐近线为$y = \pm x$

如图：
所以，割线的斜率的绝对值小于 1.
方法五：分析法：平方：

$\Leftarrow a^2 + b^2 + 2 - 2\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{b^2+1} < (a-b)^2$

$\Leftarrow (1+ab) < \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$（讨论）

$\Leftarrow 1 + 2ab + a^2b^2 < a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$

$\Leftarrow (a-b)^2 > 0 (a \neq b)$ $\therefore$原不等式成立。

这道题的处理上我采取了学生说解答思路，我简单书写和更正的设计思路。大大激发了学生的参与度。并且这个小题也是和高考试题对应的。这道题对应着

2009年和2010年辽宁省的高考试题。

2009年试题：已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+(a-1)\ln x$， $a>1$。

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：若 $a<5$，则对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$。

2010年试题：已知函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$

（I）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（II）设 $a<-1$.如果对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)\geq 4|x_1-x_2|$，求 a 的取值范围。

三、课后研讨

课后，省教研员和数学组以及各校的来宾进行了研讨。

首先，我说明了一下课程的设计想法。我们知道高三的一轮复习以基础知识掌握和训练为主。并进行一些适当的题型训练和思维的训练。我们认为，高三的复习在侧重知识的同时还要侧重对思维的训练，近几年高考试题侧重考查了思维能力和创新能力。因此，在设计本节课的时候，我们采用了以锻炼学生的思维能力为主的一题多解，多解归一的想法。在尊重教材的同时贴近高考，以考高试题进行引入，并进行讲解。让学生体会到小题制胜的重要意义。在做题的时候不要轻视小题，以及题目的迁移。

其次，本组老师从三个结合：与高考结合、与教材结合、讲练结合。六个维度：准确度、广度、深度、密度、效度、参与度。两个大的方面进行了研讨和点评。并针对课堂的效果给了好评。

最后，省教研员宋明新进行了本节课的点评。一、形式比较好，能够体现高考复习的立足点。二、互动比较好，学生能够广泛的参与。三、课外知识的处理比较好，能够恰当的给予鼓励和点评。四、小结的梳理上要在给一些时间会更好一些。五、学生构建知识系统和学习系统方面比较好。总体来说对本节课的目标达成的比较好。希望能够继续进行研究、深入高三的复习。之后刘莉主任讲了高考试题的答题策略。如何答高考试题是我们学生和老师面临的重大问题。在这方面她给了我们很大的启迪。限于篇幅就不在赘述了。

通过上高三的研讨课，让我体会到教学上还有很长的路要走，要探讨。我会继续研究和探索下去。为了，更高更好的目标而努力。