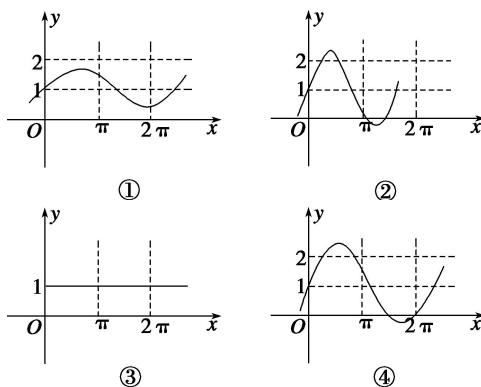


高一数学第一章章末检测(1)第1章 三角函数(A)

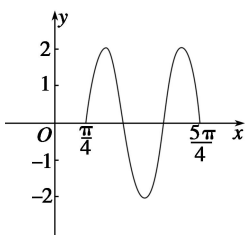
(时间: 120 分钟 满分: 160 分)

一、填空题(本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 共 70 分)

1. $\sin 600^\circ + \tan 240^\circ$ 的值是_____.
2. 已知一扇形的弧所对的圆心角为 54° , 半径 $r=20$ cm, 则扇形的周长为_____ cm.
3. 已知点 $P\left(\sin\frac{3}{4}\pi, \cos\frac{3}{4}\pi\right)$ 落在角 θ 的终边上, 且 $\theta \in [0, 2\pi)$, 则 θ 的值为_____.
4. 已知 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, 则 $\cos \alpha$ 的值是_____.
5. 已知 $\sin(2\pi - \alpha) = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$, 则 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} =$ _____.
6. 已知 a 是实数, 则函数 $f(x) = 1 + a \sin ax$ 的图象可能是_____. (填图象对应的序号)



7. 为了得到函数 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象, 可以将函数 $y = \cos 2x$ 的图象向_____ 平移 _____ 个单位长度得到. (答案不唯一)
8. 若点 $P(\sin \alpha - \cos \alpha, \tan \alpha)$ 在第一象限, 则在 $[0, 2\pi)$ 内 α 的取值范围是_____.
9. 方程 $\sin \pi x = \frac{1}{4}x$ 的解的个数是_____.
10. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象如图所示, 则 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) =$ _____.



11. 已知函数 $y = \sin \frac{\pi x}{3}$ 在区间 $[0, t]$ 上至少取得 2 次最大值, 则正整数 t 的最小值是_____.
12. 已知函数 $y = 2\sin(\omega x + \theta)$ ($0 < \theta < \pi$) 为偶函数, 其图象与直线 $y=2$ 的某两个交点横坐标为 x_1, x_2 , 若 $|x_2 - x_1|$ 的最小值为 π , 则 $\omega =$ _____, $\theta =$ _____.
13. 如果函数 $y = 3\cos(2x + \varphi)$ 的图象关于点 $\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称, 那么 $|\varphi|$ 的最小值为_____.
14. 设 $\omega > 0$, 函数 $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) + 2$ 的图象向右平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位后与原图象重合, 则 ω 的最小值是_____.

二、解答题(本大题共 6 小题, 共 90 分)

15. (14 分)求函数 $y=3-4\sin x-4\cos^2x$ 的最大值和最小值, 并写出函数取最值时对应的 x 的值.

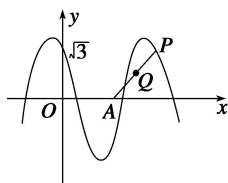
16. (14 分)已知函数 $y=a\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3$, $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的最大值为 4, 求实数 a 的值.

17. (14 分)已知 α 是第三象限角, $f(\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)\cdot\tan(-\alpha-\pi)}{\tan(-\alpha)\cdot\sin(-\pi-\alpha)}$.

(1)化简 $f(\alpha)$;

(2)若 $\cos\left[\alpha-\frac{3\pi}{2}\right]=\frac{1}{5}$, 求 $f(\alpha)$ 的值;

(3)若 $\alpha=-1860^\circ$, 求 $f(\alpha)$ 的值.



18. (16 分)如图所示, 函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$ ($x\in\mathbf{R}$, $\omega>0, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$) 的图象与 y 轴交于点 $(0, \sqrt{3})$, 且该函数的最小正周期为 π .

(1)求 θ 和 ω 的值;

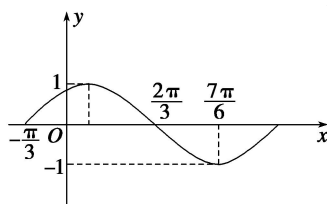
(2) 已知点 $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ ，点 P 是该函数图象上一点，点 $Q(x_0, y_0)$ 是 PA 的中点，当 $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $x_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时，求 x_0 的值。

19. (16 分) 在已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ， $x \in \mathbf{R}$ $\left[\text{其中 } A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right]$ 的图象与 x 轴的交点中，相邻两个交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，且图象上一个最低点为 $M\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的值域。

20. (16 分) 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$ 且 $\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象, 如图所示.



(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若方程 $f(x) = a$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{3}\right]$ 上有两个不同的实根, 试求 a 的取值范围.

第 1 章 三角函数(A)

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $6\pi + 40$

解析 $\because$ 圆心角 $\alpha = 54^\circ = \frac{3\pi}{10}$, $\therefore l = |\alpha| \cdot r = 6\pi$.

$\therefore$ 周长为 $(6\pi + 40)$ cm.

3. $\frac{7\pi}{4}$ 4. $-\frac{4}{5}$

5. $\frac{1}{7}$

解析 $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\therefore \sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

又 $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}$.

$\therefore \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{7}$.

6. ①②③

解析 当 $a = 0$ 时 $f(x) = 1$, ③符合,

当 $0 < |a| < 1$ 时 $T > 2\pi$, ①符合,

当 $|a| > 1$ 时 $T < 2\pi$, ②符合.

7. 右 $\frac{\pi}{3}$

解析 $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$
 $= \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

8. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

解析 $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ 且 $\tan \alpha > 0$,

$$\therefore \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 或 } \alpha \in \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right).$$

9. 7

解析 在同一坐标系中作出 $y = \sin \pi x$ 与 $y = \frac{1}{4}x$ 的图象观察易知两函数图象有 7 个交点, 所以方程有 7 个解.

10. 0

解析 方法一 由图可知, $\frac{3}{2}T = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi$, 即 $T = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 3$. $\therefore y = 2\sin(3x + \varphi)$,

将 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 代入上式 $\sin(\frac{3\pi}{4} + \varphi) = 0$.

$$\therefore \frac{3\pi}{4} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 则 } \varphi = k\pi - \frac{3\pi}{4}.$$

$$\therefore f(\frac{7\pi}{12}) = 2\sin(\frac{7\pi}{4} + k\pi - \frac{3\pi}{4}) = 0.$$

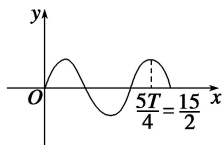
方法二 由图可知, $\frac{3}{2}T = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi$, 即 $T = \frac{2\pi}{3}$.

又由正弦图象性质可知, 若 $f(x_0) = f(x_0 + \frac{T}{2}) = 0$,

$$\therefore f(\frac{7\pi}{12}) = f(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = f(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

11. 8

解析



$$T = 6, \text{ 则 } \frac{5T}{4} \leq t,$$

$$\therefore t \geq \frac{15}{2}, \therefore t_{\min} = 8.$$

12. $2\frac{\pi}{2}$

解析 $\because y = 2\sin(\omega x + \theta)$ 为偶函数, $\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$.

$\because$ 图象与直线 $y = 2$ 的两个交点横坐标为 x_1, x_2 ,

$|x_2 - x_1|_{\min} = \pi$, 即 $T_{\min} = \pi$,

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \omega = 2.$$

13. $\frac{\pi}{6}$

解析 $\because y = 3\cos(2x + \varphi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 中心对称, 即 $3\cos(2 \times \frac{4\pi}{3} + \varphi) = 0$,

$$\therefore \frac{8\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore \varphi = -\frac{13\pi}{6} + k\pi. \therefore \text{当 } k = 2 \text{ 时, } |\varphi| \text{ 有最小值 } \frac{\pi}{6}.$$

14. $\frac{3}{2}$

解析 由函数向右平移 $\frac{4}{3}\pi$ 个单位后与原图象重合,得 $\frac{4}{3}\pi$ 是此函数周期的整数倍.又 $\omega>0$,

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} \cdot k = \frac{4}{3}\pi, \therefore \omega = \frac{3}{2}k (k \in \mathbf{Z}), \therefore \omega_{\min} = \frac{3}{2}.$$

15. 解 $y = 3 - 4\sin x - 4\cos^2 x = 4\sin^2 x - 4\sin x - 1$

$$= 4\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2, \text{ 令 } t = \sin x, \text{ 则 } -1 \leq t \leq 1,$$

$$\therefore y = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{1}{2}, \text{ 即 } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ 或 } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \text{ 时,}$$

$$y_{\min} = -2;$$

$$\text{当 } t = -1, \text{ 即 } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \text{ 时, } y_{\max} = 7.$$

16. 解 $\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \therefore 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right],$

$$\therefore -1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } a > 0, \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{ 时, } y \text{ 取得最大值 } \frac{1}{2}a + 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2}a + 3 = 4, \therefore a = 2.$$

$$\text{当 } a < 0, \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \text{ 时, } y \text{ 取得最大值 } -a + 3,$$

$$\therefore -a + 3 = 4, \therefore a = -1,$$

综上所述,实数 a 的值为2或-1.

17. 解 (1) $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha \cdot \cos(-\alpha) \cdot [-\tan(\pi + \alpha)]}{-\tan \alpha [-\sin(\pi + \alpha)]}$

$$= \frac{-\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \tan \alpha}{-\tan \alpha \cdot \sin \alpha} = \cos \alpha.$$

(2) $\because \cos\left[\alpha - \frac{3}{2}\pi\right] = \cos\left[\frac{3}{2}\pi - \alpha\right] = -\sin \alpha,$

$$\text{又 } \cos\left[\alpha - \frac{3}{2}\pi\right] = \frac{1}{5}, \therefore \sin \alpha = -\frac{1}{5}.$$

又 α 是第三象限角,

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{6}}{5},$$

$$\therefore f(\alpha) = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

(3) $f(\alpha) = f(-1860^\circ) = \cos(-1860^\circ)$

$$= \cos 1860^\circ = \cos(5 \times 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

18. 解 (1) 将 $x=0, y=\sqrt{3}$ 代入函数 $y=2\cos(\omega x + \theta)$ 中,得 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2},$

$$\text{因为 } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{由已知 } T = \pi, \text{ 且 } \omega > 0, \text{ 得 } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2.$$

(2) 因为点 $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), Q(x_0, y_0)$ 是 PA 的中点,

$y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以点 P 的坐标为 $(2x_0 - \frac{\pi}{2}, \sqrt{3})$.

又因为点 P 在 $y = 2\cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象上, 且 $\frac{\pi}{2} \leq x_0 \leq \pi$,

所以 $\cos(4x_0 - \frac{5\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $\frac{7\pi}{6} \leq 4x_0 - \frac{5\pi}{6} \leq \frac{19\pi}{6}$,

从而得 $4x_0 - \frac{5\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$, 或 $4x_0 - \frac{5\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$, 即 $x_0 = \frac{2\pi}{3}$, 或 $x_0 = \frac{3\pi}{4}$.

19. 解 (1) 由最低点为 $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$ 得 $A=2$.

由 x 轴上相邻两个交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

得 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$, 即 $T = \pi$, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

由点 $M(\frac{2\pi}{3}, -2)$ 在图象上得 $2\sin[2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi] = -2$,

即 $\sin[\frac{4\pi}{3} + \varphi] = -1$,

故 $\frac{4\pi}{3} + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$,

$\therefore \varphi = 2k\pi - \frac{11\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$.

又 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$,

故 $f(x) = 2\sin[2x + \frac{\pi}{6}]$.

(2) $\because x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore 2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]$,

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2;

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, 即 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -1,

故 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 2]$.

20. 解 (1) 由图象易知函数 $f(x)$ 的周期为

$T = 4 \times (\frac{7\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}) = 2\pi$, $A=1$, 所以 $\omega=1$.

方法一 由图可知此函数的图象是由 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到的, 故 $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

所以函数解析式为 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$.

方法二 由图象知 $f(x)$ 过点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$,

则 $\sin[-\frac{\pi}{3} + \varphi] = 0$, $\therefore -\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$\therefore \varphi = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$,

又 $\because \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$.

(2) 方程 $f(x)=a$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{3}\right]$ 上有两个不同的实根等价于 $y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象在 $\left[0, \frac{5\pi}{3}\right]$ 上有两个交点，在图中作 $y=a$ 的图象，如图为函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{3}\right]$ 上的图象，当 $x=0$ 时， $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，当 $x=\frac{5\pi}{3}$ 时， $f(x)=0$ ，由图中可以看出有两个交点时， $a\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)\cup(-1,0)$.

