

2013—2014 学年度上学期期末考试

高二年级理科 数学试卷参考答案

一、选择题

1—5 B C A D B 6—10 C B D C C 11—12 A B

二、填空题

13. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$ 14. -2^{n-1} 15. $\frac{a^2 + b^2}{4}$ 16. ①②③

三、解答题

17. 解: $\because x^2 - 8x - 20 > 0$, $\therefore x > 10$ 或 $x < -2$ -----2 分

$$\because x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a < 0$$

$$\therefore (x - (a+1))(x - 2a) < 0 \text{ -----4 分}$$

当 $a > 1$ 时

$$a+1 < x < 2a$$

$\therefore$ 是 q 的充分不必要条件

$$\therefore a+1 \geq 10, \therefore a \geq 9 \text{ -----6 分}$$

当 $a = 1$

解集为空集符合题意。

当 $a < 1$

$$2a < x < a+1$$

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件

$$\therefore a+1 \leq -2$$

$$\therefore a \leq -3$$

综上 $\{a \mid a \geq 9 \text{ 或 } a \leq -3 \text{ 或 } a = 1\}$ -----10 分

18. 解: (I) 证明: 连结 $AC \cap BD = F$, $ABCD$ 为正方形,

F 为 AC 中点, E 为 PC 中点.

所以在 $\triangle CPA$ 中, $EF \parallel PA$ -----2 分

又 $PA \subset \text{平面 } PAD$, $EF \not\subset \text{平面 } PAD$,

所以 $EF \parallel \text{平面 } PAD$ -----6 分

(II) 证明: 因为平面 $PAD \perp \text{平面 } ABCD$, 平面 $PAD \cap \text{平面 } ABCD = AD$

$ABCD$ 为正方形, $CD \perp AD$, $CD \subset \text{平面 } ABCD$, 所以 $CD \perp \text{平面 } PAD$.

又 $PA \subset \text{平面 } PAD$, 所以 $CD \perp PA$.

又 $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$, 所以 $\triangle PAD$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle APD = \frac{\pi}{2}$, 即

$PA \perp PD$

又 $CD \cap PD = D$, 且 CD 、 $PD \subset \text{面 } PDC$, 所以 $PA \perp \text{面 } PDC$

又 $PA \subset \text{面 } PAB$, 所以面 $PAB \perp \text{面 } PDC$ 12 分

19. 解:

(I) 证明: $\because$ 面 $ABC \perp \text{面 } BCD$, $\angle BCD = 90^\circ$, 且面 $ABC \cap \text{面 } BCD = BC$,

$\therefore CD \perp \text{面 } ABC$.

又 $\because AB \subset \text{面 } ABC$,

$\therefore DC \perp AB$.

.....6 分

(II) 取 BC 的中点 O , 连接 AO , 则 $AO \perp BC$, 有

$AO \perp \text{平面 } BCD$, 以 O 为原点建立坐标系如图所示.

设 $AB = 2$, $CD = m$, 则有

$\overrightarrow{AC} = (0, 1, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BD} = (m, 2, 0)$, 根据已知

$$\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 即 } \frac{2}{2\sqrt{m^2+4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 解得 } m = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

根据, $\overrightarrow{BA} = (0, 1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BD} = (\frac{2}{3}\sqrt{3}, 2, 0)$

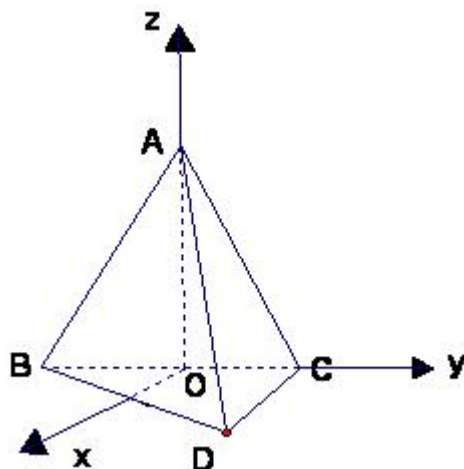
可得平面 DAB 的法向量 $\vec{m} = (3, -\sqrt{3}, 1)$

而平面 CAB 的法向量 $\vec{n} = (1, 0, 0)$, 于是

$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{13}\sqrt{13}$$

因此, 二面角 $D-AB-C$ 的大小为 $\arccos \frac{3}{13}\sqrt{13}$.

.....12 分



20. 解: (I) 当 $n=1$ 时, $a_2 = S_1 + 1 = a_1 + 1 = 2$;1 分

当 $n \geq 2$ 时, $S_n + 1 = a_{n+1}$, $S_{n-1} + 1 = a_n$, 相减得 $a_{n+1} = 2a_n$
2 分

又 $a_2 = 2a_1$, 所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 所以
 $a_n = 2^{n-1}$ 4 分

(II) 由 (I) 知 $a_n = 2^{n-1}$, 所以 $b_n = \frac{n}{4a_n} = \frac{n}{4 \cdot 2^{n-1}} = \frac{n}{2^{n+1}}$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n+1}} + \frac{n}{2^{n+2}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+2}} = \frac{\frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2} - \frac{n+2}{2^{n+2}},$$

所以 $T_n = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$ (或写成 $T_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2^n}$, $T_n = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$ 均可给至 8
分)8 分

$$\text{(III)} \quad \frac{k+2}{S_k \cdot (T_k + k + 1)} = \frac{k+2}{(2^k - 1) \cdot \left(1 - \frac{k+2}{2^{k+1}} + k + 1\right)} = \frac{1}{(2^k - 1) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)}$$

$$= \frac{2^{k+1}}{(2^k - 1) \cdot (2^{k+1} - 1)} = 2 \left(\frac{1}{2^k - 1} - \frac{1}{2^{k+1} - 1} \right) \quad \text{.....10 分}$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{S_k \cdot (T_k + k + 1)} = \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{2^k - 1} - \frac{1}{2^{k+1} - 1} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) < 2$$

若不等式 $\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{S_k \cdot (T_k + k + 1)} < m$ 对任意正整数 n 恒成立, 则 $m \geq 2$,

所以存在最小正整数 $m = 2$, 使不等式 $\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{S_k \cdot (T_k + k + 1)} < m$ 对任意正整数 n 恒成
立12 分

21. 解: 解: (1) 由题 $c = \sqrt{2}$

当直线 AC 与 x 轴垂直时, AC 的直线方程为 $x = -c$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得

$$y = \pm \frac{b^2}{a}, \therefore |AC| = \frac{2b^2}{a} \therefore S_{ABCD} = \frac{1}{2}|AC||BD| = \frac{b^2}{a} \cdot 2a = 4, \therefore b^2 = 2$$

$$\therefore a^2 = 4, \therefore \text{椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \text{-----2 分}$$

(2) 当直线 AC 不与 x 轴垂直、平行时

设 AC 的直线方程为 $y = k(x + \sqrt{2})$, BD 的直线方程为 $y = -\frac{1}{k}(x + \sqrt{2})$

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x + \sqrt{2}) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow (2k^2 + 1)x^2 + 4\sqrt{2}k^2x + 4k^2 - 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-4\sqrt{2}k^2}{2k^2 + 1}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2 - 4}{2k^2 + 1}$$

$$|AC| = \sqrt{1 + k^2} |x_2 - x_1| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{4\sqrt{1 + k^2}}{2k^2 + 1} = \frac{4(1 + k^2)}{2k^2 + 1}$$

$$\text{同理 } |BD| = \frac{4(k^2 + 1)}{k^2 + 2} \text{-----6 分}$$

$$|AC| + |BD| = \frac{4(1 + k^2)(3k^2 + 3)}{(k^2 + 2)(2k^2 + 1)}, \quad |AC||BD| = \frac{16(1 + k^2)^2}{(k^2 + 2)(2k^2 + 1)}$$

$$\frac{|AC|^2|BD|^2}{|AC| + |BD|} = \frac{64}{3} \cdot \frac{(1 + k^2)^2}{(2k^2 + 1)(2 + k^2)}, \quad \text{令 } 1 + k^2 = t \geq 1$$

$$\frac{|AC|^2|BD|^2}{|AC| + |BD|} = \frac{64}{3} \cdot \frac{t^2}{(2t - 1)(t + 1)} = \frac{1}{-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 2}, \quad \text{令 } f(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 2 (t \geq 1)$$

$$\text{当 } t = 2 \text{ 时, 即 } k^2 = 1 \text{ 时, } f(t)_{\max} = \frac{9}{4}, \therefore \frac{|AC|^2|BD|^2}{|AC| + |BD|} \text{ 有最小值 } \frac{256}{27}。$$

-----10 分

当直线 AC 与 x 轴垂直时

$$|AC| = \frac{2b^2}{a} = 2, \quad |BD| = 2a = 4$$

当直线 AC 与 x 轴平行时

$$|BD| = 2, |AC| = 4$$

$$\frac{|AC|^2 |BD|^2}{|AC| + |BD|} = \frac{32}{3}$$

$$\therefore \frac{|AC|^2 |BD|^2}{|AC| + |BD|} \text{ 有最小值 } \frac{256}{27}。 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 解：证明：设 $E(x_0, y_0)$ ，直线 l_1 过 $E(x_0, y_0)$ 点

$$\therefore x_0 x_1 + 3y_0 y_1 = 6$$

直线 l_2 过 $E(x_0, y_0)$ 点

$$\therefore x_0 x_2 + 3y_0 y_2 = 6$$

$$\therefore MN \text{ 的直线方程为 } x_0 x + 3y_0 y = 6 \text{ -----2 分}$$

双曲线 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的渐近线方程为 $x \pm \sqrt{3}y = 0$

$$\text{由 } \begin{cases} x_0 x + 3y_0 y = 6 \\ x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-6\sqrt{3}}{3y_0 - \sqrt{3}x_0} \\ y = \frac{6}{3y_0 - \sqrt{3}x_0} \end{cases}$$

$$\therefore H\left(\frac{-6\sqrt{3}}{3y_0 - \sqrt{3}x_0}, \frac{6}{3y_0 - \sqrt{3}x_0}\right)$$

$$\text{由 } \begin{cases} x_0 x + 3y_0 y = 6 \\ x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6\sqrt{3}}{3y_0 + \sqrt{3}x_0} \\ y = \frac{6}{3y_0 + \sqrt{3}x_0} \end{cases}$$

$$G\left(\frac{6\sqrt{3}}{3y_0 + \sqrt{3}x_0}, \frac{6}{3y_0 + \sqrt{3}x_0}\right) \text{-----4 分}$$

设 $P(x_3, y_3)$

$$x_3 = \frac{\frac{-6\sqrt{3}}{3y_0 - \sqrt{3}x_0} + \frac{6\sqrt{3}}{3y_0 + \sqrt{3}x_0}}{2} = \frac{-18x_0}{9y_0^2 - 3x_0^2}$$

$$\therefore \frac{x_0^2}{6} - \frac{y_0^2}{2} = 1$$

$$\therefore x_3 = x_0$$

$$y_3 = \frac{\frac{6}{3y_0 - \sqrt{3}x_0} + \frac{6}{3y_0 + \sqrt{3}x_0}}{2} = \frac{18y_0}{9y_0^2 - 3x_0^2} = -y_0$$

$$\therefore P(x_0, -y_0), \therefore |OP| = |OE| \text{-----6 分}$$

(2) 设直线 MN 与 x 轴交点为 K

$$S_{\triangle OPG} = \frac{1}{2} S_{\triangle OGH} = \frac{1}{4} |OK| |y_G - y_H| \text{-----8 分}$$

$$MN \text{ 的直线方程为 } x_0x + 3y_0y = 6, \text{ 令 } y = 0, \quad x = \frac{6}{x_0}$$

$$|y_G - y_H| = \frac{12\sqrt{3}x_0}{9y_0^2 - 3x_0^2} \quad \therefore \frac{x_0^2}{6} - \frac{y_0^2}{2} = 1$$

$$\therefore S_{\triangle OPG} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{x_0} \times \left| \frac{12\sqrt{3}x_0}{-18} \right| = \sqrt{3} \text{-----12 分}$$