三省三校文科数学试卷 1

一、选择题

1. 设集合 $A=\left\{x\left|x^2-2x\le 0\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|-4\le x\le 0\right.\right\}$，则 $A\bigcap C_R B$ 等于（ C ）

(A) R　　(B) $\left\{x\left|x\in R, x\ne 0\right.\right\}$　　(C) $\left\{x\left|0<x\le 2\right.\right\}$　　(D) $\varnothing$

2．若复数 z 满足 $iz=2+4i$,则在复平面内, z 对应的点的坐标是(　C　)

（A）$\left(2,4\right)$　　（B）$\left(2,-4\right)$　　（C）$\left(4,-2\right)$　　（D）$\left(4,2\right)$

3. 命题“$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2-3x+2\ge 0$”的否定是　　（　　）

（A）$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2-3x+2<0$　　（B）$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2-3x+2>0$

（C）$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2-3x+2\le 0$　　（D）$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2-3x+2\ge 0$

4．若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} y\le 1 \\ x\le 2 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$，则 $x+3y$ 的最大值是 D

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

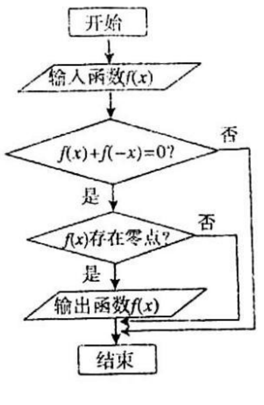
5. 某流程图如图所示，现输入如下四个函数，则可以输出的函数是（　B　）

（A）$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

（B）$f(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^x+1}$

（C）$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

（D）$f(x)=\sin(\dfrac{\pi}{2}+x)$

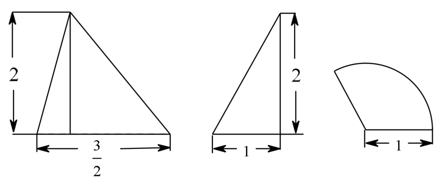


6．等差数列{a_n}中，$a_2+a_4+a_6=12$，则 S_7 的值是（　A　）

（A） 21　　（B）24　　（C）28　　（D）7

7. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）

A. $\dfrac{2\pi}{3}$　　**B.** $\dfrac{\pi}{3}$　　**C.** $\dfrac{2\pi}{9}$　　**D.** $\dfrac{\pi}{9}$



8．已知函数 $f(x)=2^x+x, g(x)=\log_3 x+x, h(x)=x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的零点依次为 a、b、c，

则 A

（A）$a<b<c$　（B）$c<b<a$　（C）$c<a<b$　（D）$b<a<c$

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，对任意 $x\in R$ 都有 $f(x+6)=f(x)+2f(3)$，

且 $f(-2)=2$，则 $f(2014)$ =B

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

10. **双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 $F(c,0)$，以原点为圆心，c 为半径的圆与双曲线在二象限的交点为 A，若圆在 A 点的切线的斜率为 $-\sqrt{3}$，则双曲线的离心率为（　）**

A. $2\sqrt{3}$　**B.** $\sqrt{6}$　**C.** $\sqrt{3}$　**D.** $\sqrt{2}$

11.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x)+1,-1\le x<0\\ x^3-3x+2,0\le x\le a\end{cases}$ 的值域是 $[0,2]$，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $(0,1]$　B. $[1,\sqrt{3}]$　C. $[1,2]$　D. $[\sqrt{3},2]$

12. **函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $x>0$ 时 $f(x)=e^{-x}(x-2)$，则下面结论中正确的是（　）**

A．$f(x)$ 有 5 个不同的零点　**B．若方程 $f(x)=k$ 有三个不同的解，则 $k\in\left(-\frac{1}{e^3},\frac{1}{e^3}\right)$**

C．函数 $f(x)$ 的值域为 R　**D．函数 $f(x)$ 在区间 $(-3,3)$ 单调递增**

二、填空题

13. 若 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})-\sin\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{5}$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=$________.

14. 正方形 $ABCD$ 的边长为 2，$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC},\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB})$ 则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DF}=\underline{-\frac{10}{3}}$. 15.

15. **正四面体 $ABCD$ 的棱长为 4，E 为棱 BC 的中点，过 E 作其外接球的截面，则截面面积的最小值为______________.**

16. 已知函数 $f(x)=|\cos x|\cdot\sin x$，给出下列五个说法：

① $f\left(\frac{2014\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.②若 $|f(x_1)|=|f(x_2)|$，则 $x_1=x_2+k\pi$.③ $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上

单调递增. ④函数 $f(x)$ 的周期为 π .⑤ $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 成中心对称.

其中正确说法的序号是_______________.

17.（本小题满分 12 分）三角形 ABC 中，内角 A、B、C 所对边 a、b、c 成公比小于 1 的等比数列，且 $\sin B+\sin(A-C)=2\sin 2C$.

（I）求 B 角的余弦值；

（II）若 $b=\sqrt{3}$ ，求 ΔABC 的面积.

18. 已知随机抽取某城市一年(365 天)内 100 天的空气质量指数 API 的监测数据，统计如下：

API	[0,50]	（50,100]	（100,150]	（150,200]	（200,250]	（250,300]	>300
空气质量	优	良	轻微污染	轻度污染	中度污染	中度重污染	重度污染
天数	4	13	18	30	9	11	15

（Ⅰ）若某企业每天由空气污染造成的经济损失 S（单位：元）与 API 指数 w 的关系式为：

$$S=\begin{cases}0, & 0\le w\le 100\\ 4w-400, & 100<w\le 300\\ 2000, & w>300\end{cases}$$

试估计本年内 S 大于 200 元且不超过 600 元的概率;

（Ⅱ）若本次抽取的样本数据有 30 天是在供暖季，其中有 6 天为重度污染，能否在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为本年空气重度污染与供暖有关？

附：

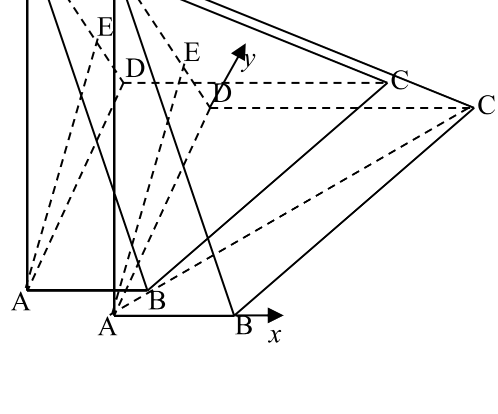
$P(K^2\ge k_0)$	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

19. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形， AD 垂直于 AB 和 DC ，侧棱 $SA\perp$ 底面 $ABCD$，且 $SA=2,AD=DC=1$.

(Ⅰ) 若点 E 在 SD 上， 且 $AE\perp SD$. 证明: $AE\perp$ 平面 SDC；

(Ⅱ)求三棱锥 $B-ECD$ 的体积.



(Ⅰ)证明：$\because$ 侧棱 $SA\perp$ 底面 $ABCD$，$CD\subset$ 底面 $ABCD$

$\therefore SA\perp CD$.

又 $\because$ 底面 $ABCD$ 是直角梯形，AD 垂直于 AB 和 DC

$\therefore AD\perp CD$, 又 $AD\bigcap SA=A$

$\therefore CD\perp$ 侧面 SAD, $AE\subset$ 侧面 SAD

$\therefore\ AE\perp CD, AE\perp SD, CD\bigcap SD=D$

$\therefore\ AE\perp$ 平面 SDC

(Ⅱ) 连结 AC, $\because$ 底面 $ABCD$ 是直角梯形，AD 垂直于 AB 和 DC,

$SA=2, AD=DC=1$. $\therefore\ AC=\sqrt{2}$, $\angle CAB=\dfrac{\pi}{4}$, 设 $AB=t$，则 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}AC\cdot t=\dfrac{1}{2}t$,

$\because$ 三棱锥 $V_{S-ABC}=\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}t$, $\therefore\ t=AB=\dfrac{1}{2}$.

如图建系，则 $A(0,0,0), S(0,0,2), D(0,1,0), B(\dfrac{1}{2},0,0), C(1,1,0)$, 由题意平面 SAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{m}=(1,0,0)$，不妨设平面 SBC 的一个法向量为 $\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{SB}=(\dfrac{1}{2},0,-2)$

$\overrightarrow{SC}=(1,1,-2)$, 则 $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0, \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{SC}=0$, 得 $\begin{cases}x-4z=0\\x+y-2z=0\end{cases}$, 不妨令 $z=1$, 则 $\overrightarrow{n}=(4,-2,1)$

$$\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{4}{\sqrt{21}},$$

设面 SAD 与面 SBC 所成二面角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{105}}{21}$

(20)（本小题满分 12 分）

椭圆 M : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且经过点 $P(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$. 过坐标原点的直线 l_1 与 l_2 不在坐标轴上，l_1 与椭圆 M 交于 A,C 两点，l_2 与椭圆 M 交于 B,D 两点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程;

（Ⅱ）若平行四边形 $ABCD$ 为菱形，求菱形 $ABCD$ 面积的最小值.

（20）**解：**

（Ⅰ）依题意有$\begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c, \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1 \end{cases}$，又因为$a^2=b^2+c^2$，所以得$\begin{cases} a^2=2, \\ b^2=1. \end{cases}$

故椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……2 分

（Ⅱ）依题意，点A,C满足$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \\ y=k_1x+m_1, \end{cases}$

所以x_A,x_C是方程$(2k_1^{\ 2}+1)x^2+4k_1m_1x+2m_1^{\ 2}-2=0$的两个根.

得$\begin{cases} \Delta=8\cdot(2k_1^{\ 2}+1-m_1^{\ 2})>0, \\ x_A+x_C=-\dfrac{4k_1m_1}{2k_1^{\ 2}+1}. \end{cases}$

所以线段AC的中点为$(-\dfrac{2k_1m_1}{2k_1^{\ 2}+1},\dfrac{m_1}{2k_1^{\ 2}+1})$.

同理，所以线段BD的中点为$(-\dfrac{2k_2m_2}{2k_2^{\ 2}+1},\dfrac{m_2}{2k_2^{\ 2}+1})$.

因为四边形$ABCD$是平行四边形，所以$\begin{cases} -\dfrac{2k_1m_1}{2k_1^{\ 2}+1}=-\dfrac{2k_2m_2}{2k_2^{\ 2}+1}, \\ \dfrac{m_1}{2k_1^{\ 2}+1}=\dfrac{m_2}{2k_2^{\ 2}+1}. \end{cases}$

解得，$m_1=m_2=0$或$k_1=k_2$（舍）.

即平行四边形$ABCD$的对角线AC和BD相交于原点O. ……6 分

（Ⅲ）点A,C满足$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \\ y=k_1x, \end{cases}$

所以x_A,x_C是方程$(2k_1^{\ 2}+1)x^2-2=0$的两个根，即$x_A^{\ 2}=x_C^{\ 2}=\dfrac{2}{2k_1^{\ 2}+1}$

故$|OA|=|OC|=\sqrt{1+k_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{2k_1^{\ 2}+1}}$.

同理，$|OB|=|OD|=\sqrt{1+k_2^{\ 2}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{2k_2^{\ 2}+1}}$.

又因为$AC\perp BD$，所以$|OB|=|OD|=\sqrt{1+(\dfrac{1}{k_1})^2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{2(\dfrac{1}{k_1})^2+1}}$，其中$k_1\neq 0$.

从而菱形$ABCD$的面积S为

$$S=2|OA|\cdot|OB|=2\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{2k_1^2+1}}\cdot\sqrt{1+(\frac{1}{k_1})^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{2(\frac{1}{k_1})^2+1}},$$

整理得 $S=4\sqrt{\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{(k_1+\dfrac{1}{k_1})^2}}}$，其中 $k_1\neq 0$.

故，当 $k_1=1$ 或 -1 时，菱形 $ABCD$ 的面积最小，该最小值为 $\frac{8}{3}$.　　　……12 分

21．已知函数 $f(x)=(x+1)e^{-x}$（e 为自然对数的底数）

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设函数 $\varphi(x)=xf(x)+tf'(x)+e^{-x}$，存在实数 $x_1,\ x_2\in[0,1]$，使得 $2\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$，

求出实数 t 的取值范围.

解：（Ⅰ）∵函数的定义域为 **R**，$f'(x)=-\dfrac{x}{e^x}$

∴当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$。

∴ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

（Ⅱ）假设存在 $x_1,\ x_2\in[0,1]$，使得 $2\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ 成立，则 $2[\varphi(x)]_{\min}<[\varphi(x)]_{\max}$。

$$\because\ \varphi(x)=xf(x)+tf'(x)+e^{-x}=\frac{x^2+(1-t)x+1}{e^x}$$

$$\therefore\ \varphi'(x)=\frac{-x^2+(1+t)x+t}{e^x}=-\frac{(x-t)(x-1)}{e^x}$$

①当 $t\geq 1$ 时，$\varphi'(x)\leq 0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，∴ $2\varphi(1)<\varphi(0)$，即

$t>3-\dfrac{e}{2}>1$。

②当 $t\leq 0$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，∴ $2\varphi(0)<\varphi(1)$，即

$t<3-2e<0$。

③当 $0<t<1$ 时，

在 $x\in[0,t)$，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在 $[0,t]$ 上单调递减

在 $x\in(t,1]$，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在 $[t,1]$ 上单调递增

所以 $2\varphi(t)<\max\{\varphi(0),\varphi(1)\}$，即 $2\dfrac{t+1}{e^t}<\max\{1,\dfrac{3-t}{e}\}$ ——(*)

由（Ⅰ）知，$g(t)=2\dfrac{t+1}{e^t}$ 在 $[0,1]$ 上单调递减

故$\dfrac{4}{e} \le 2\dfrac{t+1}{e^t} \le 2$，而$\dfrac{2}{e} \le \dfrac{3-t}{e} \le \dfrac{3}{e}$，所以不等式(*)无解

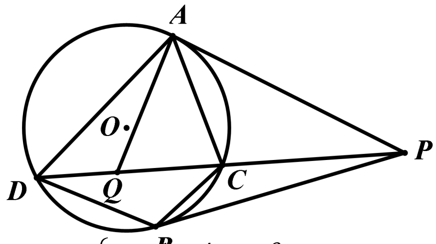
综上所述，存在$t \in (-\infty, 3-2e) \cup (3-\dfrac{e}{2}, +\infty)$,使得命题成立.

22. 选修4—1，几何证明选讲

如图，PA, PB是圆O的两条切线，A, B是切点，C是劣弧AB(不包括端点)上一点，直线PC交圆O于另一点D，Q在弦CD上，且$\angle DAQ = \angle PBC$. 求证：

（Ⅰ）$\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{BC}{AC}$；

（Ⅱ）$\triangle ADQ \backsim \triangle DBQ$.



23、选修4－4：坐标系与参数方程

已知在直角坐标系xOy中，圆锥曲线C的参数方程为$\begin{cases} x = 1 + 4\cos\theta \\ y = 2 + 4\sin\theta \end{cases}$（θ为参数），直线$l$经过定点P（3，5），倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$.

（Ⅰ）写出直线l的参数方程和圆的标准方程；

（Ⅱ）设直线l与圆相交于A，B两点，求｜PA｜·｜PB｜的值.

24、选修4－5：不等式选讲

设函数$f(x) = |2x-1| - |x+2|$.

（Ⅰ）求不等式$f(x) \ge 3$的解集；

（Ⅱ）若关于x的不等式$f(x) \ge t^2 - 3t$在$[0,1]$上无解，求实数t的取值范围.

18.解：（Ⅰ）由 $200 < S \leq 600$，得 $150 < w \leq 250$，频数为 39，概率为 0.39

（Ⅱ）根据以上数据得到如下列联表：

	非重度污染	重度污染	合计
供暖季	24	6	30
非供暖季	61	9	70
合计	85	15	100

K^2 的观测值 $k=\dfrac{100\times\left(24\times 9-61\times 6\right)^2}{85\times 15\times 30\times 70}\approx 2.723$

由于 2.723>2.706,所以能在犯错误的概率不超过 0.10 的前提下认为空气重度污染与供暖有关.