

数学试卷 高一

考试时间：120 分钟 试题满分：150 分

一、选择题 (4 个选项中只有 1 个选项正确，每题 5 分，共 12 题，满分 60 分)

1. 满足条件 $\emptyset \subsetneq M \subseteq \{0,1,2,3\}$ 的集合 M 的个数为

- A. 8 B. 14 C. 15 D. 16

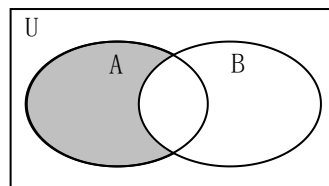
2. 化简 $\frac{x+x^{-1}+2}{x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}$ 的结果为

- A. $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$ B. $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$ C. $x^{-\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$ D. $x-x^{-1}$

3. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{y \mid y = 2^x, x < 1\}$, $B = \{x \mid y = \ln(1-x)\}$, 则右图中阴影部分表示的集合为

- A. $\{x \mid x \geq 1\}$ B. $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$

- C. $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$ D. $\{x \mid x \leq 1\}$



4. 已知集合 $A = \{a, b\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 构造从集合 A 到集合 B 的映射, 要求 B 中有两个象, 则这样的映射的个数是

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 9

5. 将“不超过 x 的最大整数”所确定的函数记为 $y = [x]$, 则函数 $y = [(x+1)^2]$ 的值域是

- A. $[0, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $\mathbf{N}$ D. $\mathbf{N}_+$

6. 函数 $f(x) = \frac{(a^x + 1)x}{a^x - 1}$, ($a > 0, a \neq 1$)

- A. 是奇函数 B. 是偶函数
C. 既不是奇函数也不是偶函数 D. 既是奇函数又是偶函数

7. 已知函数 $f(n)$ 满足 $f(1) = 2, f(n+1) = nf(n) + 1, n \in \mathbf{N}_+$, 则 $f(4) =$

- A. 16 B. 17 C. 22 D. 23

8. 设 $\lg 2 = a, \lg 3 = b$, 则 $a = \log_5 12$ 等于

A. $\frac{2a+b}{1+a}$ B. $\frac{a+2b}{1+a}$ C. $\frac{2a+b}{1-a}$ D. $\frac{a+2b}{1-a}$

9. 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(1-x) = f(1+x)$ ，则在函数

$f(-1), f(0), f(1), f(3)$ 中，最小的一个不可能是

A. $f(-1)$ B. $f(0)$ C. $f(1)$ D. $f(3)$

10. 下列结论正确的是

A. $\log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{2}} 2 > \log_{\frac{5}{2}} 2$ B. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{2}} 2$
C. $\log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{5}{2}} \frac{5}{2} > \log_{\frac{1}{2}} 2$ D. $\log_{\frac{1}{2}} 2 > \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 2$

11. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象是连续的，若 $a < b < c$ ，且

$f(a) \cdot f(b) < 0$ ， $f(b) \cdot f(c) < 0$ ，则函数 $f(x)$ 在 (a, c) 内的零点个数是

A. 2 个 B. 不小于 2 的奇数个 C. 不小于 2 的偶数个 D. 至少 2 个

12. 设一次函数 $y = kx + b$ 与幂函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两个不同的点

$(x_1 < x_2)$ ，则当 $x \in (x_1, x_2)$ 时，下列结论正确的是

A. $x^{\frac{1}{2}} > kx + b$ B. $x^{\frac{1}{2}} = kx + b$ C. $x^{\frac{1}{2}} < kx + b$ D. $x^{\frac{1}{2}} \leq kx + b$

二、填空题(每题 5 分，共 4 题，满分 20 分)

13. 下列命题正确的个数为_____个。

(1) 函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $a(a > 0)$ 个单位得到函数 $y = f(x-a)$ 的图象；

(2) 函数 $y = f(x)$ 的图象向上平移 $b(b > 0)$ 个单位得到函数 $y = f(x)+b$ 的图象；

(3) 函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $a(a > 0)$ 个单位得到函数 $y = f(x+a)$ 的图象；

(4) 函数 $y = f(x)$ 的图象向下平移 $b(b > 0)$ 个单位得到函数 $y = f(x)-b$ 的图象。

14. 设函数 $f(\log_2 x)$ 的定义域是 $[2\sqrt{2}, 8]$ ，则函数 $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 的定义域是_____。

15. 不等式 $\log_3(-x) > x+1$ 的解集为_____。

16. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases}$, 则它的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____。

三、解答题(共 6 题, 17 题满分 10 分, 18-22 题每题 12 分, 满分 70 分)

17. 已知集合 $A = \{x \mid 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x \mid 2 < x < 10\}$, $C = \{x \mid x < a\}$.

(I) 求 $A \cup B$; $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$; (II) 若 $A \cap C \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围.

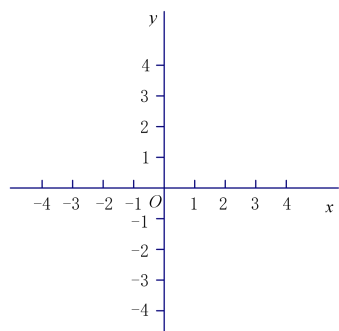
18. 函数 $f(x) = a \cdot 4^x - 2^x - 1$ 。

(I) 当 $a = 2$ 时, 求函数在 $x \in [-1, 1]$ 上的值域; (II) 若关于 x 的方程 $f(x) = 0$ 有解, 求 a 的取值范围。

19. 已知函数 $f(x) = |x+1| + ax$ ($a \in \mathbf{R}$).

(I) 若 $a = 2$, 在所给坐标系中画出此时函数的图象;

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上具有单调性, 求 a 的取值范围.



20. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $[-4, 4]$ 的偶函数，且 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上为二次函数，在 $[2, 4]$ 上是对数函数， $f(0) = -1$ ， $f(2) = -\frac{1}{4}$ 。(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式，并求出 $f(x)$ 的单调区间；(II) 求 $f(x)$ 的值域；(III) 试讨论方程 $f(x) = m$ 实根的个数。

21. 一片森林面积为 a ，计划每年砍伐一些树，且每年砍伐面积的百分比相等，当砍伐到面积的一半时。所用时间是10年，为保护生态环境。森林面积至少要保留原面积的 $\frac{1}{4}$ ，已知到今年为止，森林剩余面积为原来的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求：(I) 到今年为止：. 该森林已砍伐了多少年？(II) 今后最多还能砍伐多少年？

22. 若定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足当 $x \in (0, 2]$ 时， $f(x) = \frac{3^x}{9^x + 1}$ 。

- (I) 求 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的解析式；(II) 判断 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上的单调性，并给予证明；
(III) 当 λ 为何值时，关于方程 $f(x) = \lambda$ 在 $x \in [-2, 2]$ 上有实数解？