

教学案例：圆锥曲线定义的运用

一、教学内容分析

本课选自《全日制普通高级中学教科书(必修)•数学》(人教版)高二(上),第八章(圆锥曲线方程复习课)

圆锥曲线的定义反映了圆锥曲线的本质属性,它是无数次实践后的高度抽象.恰当地利用定义解题,许多时候能以简驭繁.因此,在学习了椭圆、双曲线、抛物线的定义及标准方程、几何性质后,我认为有必要再一次回到定义,熟悉“利用圆锥曲线定义解题”这一重要的解题策略.

二、学生学习情况分析

我所任教班级的学生是初中开始“课程改革”后的第一届毕业生,他们在初中三年的学习中,接受的是“新课改”的理念,学习的是“新课标”下的课程、教材.

与以往的学生比较,这届学生的特点是:参与课堂教学活动的积极性更强,思维敏捷,敢于在课堂上发表与众不同的见解,但计算能力较差,字母推理能力较弱,使用数学语言的表达能力也略显不足.

三、设计思想

由于这部分知识较为抽象,难以理解.如果离开感性认识,容易使学生陷入困境,降低学习热情.在教学时,我有意识地引导学生利用波利亚的一般解题方法处理习题,针对学生练习中产生的问题,进行点评,强调“双主作用”的发挥.借助多媒体动画,引导学生主动发现问题、解决问题,主动参与教学,在轻松愉快的环境中发现、获取新知,提高教学效率.

四、教学目标

1. 深刻理解并熟练掌握圆锥曲线的定义,能灵活应用定义解决问题;熟练掌握焦点坐标、顶点坐标、焦距、离心率、渐近线、焦半径等概念和求法;能结合平面几何的基本知识求解圆锥曲线的方程.

2. 通过对练习,强化对圆锥曲线定义的理解,培养思维的深刻性、创造性、科学性和批判性,提高空间想象力及分析、解决问题的能力;通过对问题的不断引申,精心设问,引导学生学习解题的一般方法及联想、类比、猜测、证明等合情推理方法.

3. 借助多媒体辅助教学,激发学习数学的兴趣.在民主、开放的课堂氛围中,培养学生敢想、敢说、勇于探索、发现、创新的精神.

五、教学重点与难点:

教学重点

1. 对圆锥曲线定义的理解
2. 利用圆锥曲线的定义求“最值”
3. “定义法”求轨迹方程

教学难点：

巧用圆锥曲线定义解题

六、教学过程设计

【设计思路】

由于这是一堂习题课，加上我所任教的班级是重点中学的理科班，学生有较好的数学基础，学习积极性较高，领悟能力较好，所以在教学中，我拟采用师生共同参与的谈话法：由教师提出问题，激发学生积极思考，引导他们运用已有的知识经验，利用合情推理来自行获取新知识。通过个别回答，集体修正的方法让我及时得到反馈信息。最后，我将根据学生回答问题的情况进行小结，概括出问题的正确答案，并指出学生解题方法的优缺点。

（一）开门见山，提出问题

一上课，我就直截了当地给出——

例题 1：（1）已知 $A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$ 动点 M 满足 $|MA| + |MB| = 2$ ，则点 M 的轨迹是（ ）。

（A）椭圆 （B）双曲线 （C）线段 （D）不存在

（2）已知动点 $M(x, y)$ 满足 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = |3x + 4y|$ ，则点 M 的轨迹是（ ）。

（A）椭圆 （B）双曲线 （C）抛物线 （D）两条相交直线

【设计意图】

定义是揭示概念内涵的逻辑方法，熟悉不同概念的不同定义方式，是学习和研究数学的一个必备条件，而通过一个阶段的学习之后，学生们对圆锥曲线的定义已有了一定的认识，他们是否能真正掌握它们的本质，是我本节课首先要弄清楚的问题。

为了加深学生对圆锥曲线定义理解，我以圆锥曲线的定义的运用为主线，精心准备了两道练习题。为杜绝一些错误认识在学生大脑中滋生、萌芽，我准备采用电脑多媒体辅助教学——先制作好若干“电脑小课件”，一旦有学生提出错误的解法，就向学生们展示。希望用形象生动的“电脑课件”使学生对问题有正确的认识。此外，因为涉及的内容较多，学生的训练量也较大，所以考虑利用实物投影器等媒体来辅助教学，一方面能弥补在黑板上板演耗时多的不足，另一方面则可以让一边演示自己的“成果”，一边进行介绍说明，有利于激发更多的学生主动参与，真正成为学习的主体。

【学情预设】

估计多数学生能够很快回答出正确答案，但是部分学生对于圆锥曲线的定义可能并未真正理解，因此，在学生们回答后，我将要求学生接着说出：若想答案是其他选项的话，条件要怎么改？这对于已学完圆锥曲线这部分知识的学生来说，并不是什么难事。但问题（2）就可能让学生们费一番周折——

如果有学生提出：可以利用变形来解决问题，那么我就可以循着他的思路，

先对原等式做变形：
$$\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}{|3x+4y|} = 5$$
这样，很快就能得出正确结果。如

若不然，我将启发他们从等式两端的式子入手，考虑通过适当的变形，转化为学生们熟知的两个距离公式。

在对学生们的解答做出判断后，我将把问题引申为：该双曲线的中心坐标是_____，实轴长为_____，焦距为_____。以深化对概念的理解。

（二）理解定义、解决问题

例 2 (1) 已知动圆 A 过定圆 B: $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$ 的圆心，且与定圆 C:

$x^2 + y^2 - 6x - 91 = 0$ 相内切，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

(2) 在 (1) 的条件下，给定点 $P(-2, 2)$ ，求 $|PA| + \frac{5}{3}|AB|$ 的最小值。

(3) 在 (2) 的条件下求 $|PA| + |AB|$ 的最小值。

【设计意图】

运用圆锥曲线定义中的数量关系进行转化，使问题化归为几何中求最大（小）值的模式，是解析几何问题中的一种常见题型，也是学生们比较容易混淆的一类问题。例 2 的设置就是为了方便学生的辨析。

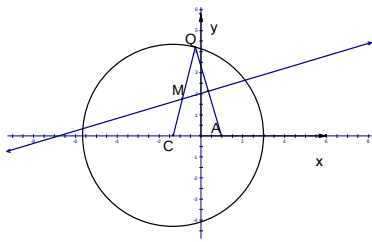
【学情预设】

根据以往的经验，多数学生看上去都能顺利解答本题，但真正能完整解答的可能并不多…。事实上，解决本题的关键在于能准确写出点 A 的轨迹，有了练习题 1 的铺垫，这个问题对学生们来讲就显得颇为简单，因此面对例 2 (1)、(2)，多数学生应该能准确给出解答，但是对于例 2 (3) 这样相对比较陌生的问题，学生要么就卡壳了，要么可能得出错误的解答。我准备在学生们都解答完后，选择几份有“共性”错误的练习，借助于实物投影仪与电脑，加以点评。这时，也许会有学生说应当是 P、A、B 三点共线时，取最小值。那么，我应该鼓励学生进行的大胆构想，同时不急于给出标准答案，而是打开“几何画板”，利用其能够准确测量线段的特点，让学生们自己发现错误，在电脑动画的帮助下，让学生们寻找到点 B 所在正确位置后，叫学生演练出正确的解题过程，并借助实物投影加以演示。在学生们得出正确解答后，由一位学生进行归纳小结：在椭圆中，当定点 A 不在椭圆内部时，则 A、F 的连线与椭圆的交点 M 就是使 $|BA| + |BF|$ 最小的点；当定点 A 在椭圆内部时，则 A 与另一焦点 F' 的连线的延长线与椭圆的交点 B 即为所求。

（三）自主探究、深化认识

如果时间允许，练习题将为学生们提供一次数学猜想、试验的机会——

练习：设点 Q 是圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 25$ 上动点，点 $A(1, 0)$ 是圆内一点， AQ 的垂直平分线与 CQ 交于点 M ，求点 M 的轨迹方程。



引申：若将点 A 移到圆 C 外，点 M 的轨迹会是什么？

【设计意图】

练习题设置的目的是为学生课外自主探究学习提供平台，当然，如果课堂上时间允许的话，可借助“多媒体课件”，引导学生对自己的结论进行验证。

【知识链接】

（一）圆锥曲线的定义

1. 圆锥曲线的第一定义
2. 圆锥曲线的统一定义

（二）圆锥曲线定义的应用举例

1. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的两焦点为 F_1 、 F_2 ， P 为曲线上一点，若 P 到左焦点 F_1 的距离为 12，求 P 到右准线的距离。

2. P 为等轴双曲线 $x^2 - y^2 = a^2$ 上一点， F_1 、 F_2 为两焦点， O 为双曲线的中心，求 $\frac{|PF_1| + |PF_2|}{|PO|}$ 的取值范围。

3. 在抛物线 $y^2 = 2px$ 上有一点 $A(4, m)$ ， A 点到抛物线的焦点 F 的距离为 5，求抛物线的方程和点 A 的坐标。

4. (1) 已知点 F 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点， M 是这椭圆上的动点， $A(2, 2)$ 是一个定点，求 $|MA| + |MF|$ 的最小值。

(2) 已知 $A(\frac{11}{2}, 3)$ 为一定点， F 为双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ 的右焦点， M 在双曲线右支上移动，当 $|AM| + \frac{1}{2}|MF|$ 最小时，求 M 点的坐标。

(3) 已知点 $P(-2, 3)$ 及焦点为 F 的抛物线 $y = \frac{x^2}{8}$ ，在抛物线上求一点 M ，使 $|PM| + |FM|$ 最小。

5. 已知 $A(4, 0)$ ， $B(2, 2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 内的点， M 是椭圆上的动点，

求 $|MA|+|MB|$ 的最小值与最大值。

七、教学反思

本课将借助于“POWERPOINT 课件”，利用两个例题及其引申，通过一题多变，层层深入的探索，以及对猜测结果的检测研究，培养学生思维的深刻性、创造性、科学性、批判性，使学生从学会一个问题的求解到掌握一类问题的解决方法，领略数学的统一美。“电脑多媒体课件”的介入，将使全体学生参与活动成为可能，使原来令人难以理解的抽象的数学理论变得形象，生动且通俗易懂，同时，运用“多媒体课件”辅助教学，节省了板演的时间，从而给学生留出更多的时间自悟、自练、自查，充分发挥学生的主体作用，这充分显示出“多媒体课件”与探究合作式教学理念的有机结合的教学优势。

1. “满堂灌”的教学方式已被越来越多的教师所摒弃，“满堂问”的教学方式形似启发式教学，实则为“教师牵着学生，按教师事先设计的讲授程序”所进行的接受性学习。基于以上考虑，本人期望在教学中能尝试使用“探究—合作”式教学模式进行教学，使学生们的“知识的获得过程”不再是简单的“师传生受”，而是让学生依据自己已有的知识和经验主动的加以建构。在这个建构过程中，学生应是教师主导下的主体，是知识的主动建构者。所设计的问题以及引导学生进行探究过程的发问，都力求做到“把问题定位在学生认知的最近发展区”

2. 在有限的时间内应突出重点，突破难点，给学生留有自主学习的时间和空间。

为了在课堂上留给学生足够的空间，我将几类题型作了处理——将“定义法求轨迹问题”分置于例 2（1）与练习中，循序渐进的让学生把握这类问题的解法；将学生容易混淆的两类求“最值问题”并为一道题，方便学生进行比较、分析。虽然从表面上看，我这一堂课的教学容量不大，但事实上，学生们的思维运动量并不会小。

3. 现代教育技术的发展为我们提供了丰富的媒体条件，然而，教师所编导的教学活动应该随着整体环境的变化、学生群体的变更而变化。

在本节课，我只是根据需要制作了一个较为简单的“小课件”，并在其中作了多个按钮，以便根据学生的上课情况及时对教程进行调整。

总之，如何更好地选择符合学生具体情况，满足教学目标的例题与练习、灵活把握课堂教学节奏仍是我今后工作中的一个重要研究课题。而要能真正进行素质教育，培养学生的创新意识，自己首先必须更新观念——在教学中适度使用多媒体技术，让学生有参与教学实践的机会，能够使学生在学新知识的同时，激发起求知的欲望，在寻求解决问题的办法的过程中获得自信和成功的体验，于不知不觉中改善了他们的思维品质，提高了数学思维能力。