

高二数学试卷

考试时间:120 分钟

试题满分:150 分

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 下列四个命题中,正确命题的个数是

- (1)在空间中,经过直线 l 外一点 P 有且只有一条直线与直线 l 平行.
- (2)在空间中,经过直线 l 外一点 P 有且只有一个平面与直线 l 平行.
- (3)在空间中,经过平面 α 外一点 P 有且只有一条直线与平面 α 平行.
- (4)在空间中,经过平面 α 外一点 P 有且只有一个平面与平面 α 平行.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. a, b, c 是三条互不重合的直线, α, β 是两个不重合的平面,给出四个命题:

- ① $a \parallel b, b \parallel \alpha$, 则 $a \parallel \alpha$;
- ② $a, b \subset \alpha, a \parallel \beta, b \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$;
- ③ $a \perp \alpha, a \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$;
- ④ $a \perp \alpha, b \parallel \alpha$, 则 $a \perp b$.

其中正确命题的个数是

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

3. 过平面 α 外的两点 A, B 有无穷多个平面都与 α 垂直,则一定有

- (A) 直线 $AB \parallel \alpha$
- (B) 直线 AB 与 α 成 60° 角
- (C) A, B 两点在 α 的一条垂线上
- (D) A, B 两点到 α 的距离相等

4. 圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 的公切线有

(A) 4 条 (B) 3 条 (C) 2 条 (D) 1 条

5. 直线 $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的公共点,最多有

(A) 4 个 (B) 3 个 (C) 2 个 (D) 1 个

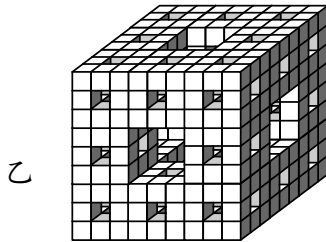
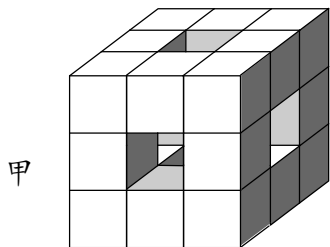
6. 方程 $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ 分别表示三条不同的直线 l_1, l_2, l_3 . 则“存在实数 λ , 使得 $f_3(x, y) = f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y)$ 成立”是“直线 l_1, l_2, l_3 三线共点”的

- (A) 充分必要条件
- (B) 充分不必要条件
- (C) 必要不充分条件
- (D) 既不充分又不必要条件

7. 在圆周上最多能找到三个点使任意两点的距离都相等. 在球面上最多可以找到 N 个点使任意两点的距离都相等, 则 N 等于

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

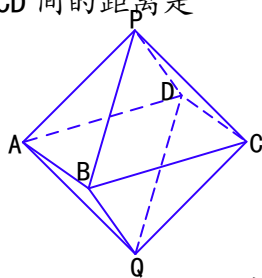
8. 将正方体分成 27 个边长为 a 的小正方体作如下变化: 挖去每一个面上中间的那一个正方体, 及正方体中心的那一个小正方体. 所得如图甲所示几何体. 若对该几何体继续施以相同的变换, 则所得如图乙所示新几何体体积为



(A) $\frac{400}{27}a^3$ (B) $\frac{140}{9}a^3$ (C) $\frac{160}{9}a^3$ (D) $\frac{490}{27}a^3$

9. 设正八面体 $PABCDQ$ 的棱长为 a , 则平面 PAB 与平面 QCD 间的距离是

(A) $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}a$



10. 直线 m 、 n 的方程分别为 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 和 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (其中 $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$ 且 $A_2^2 + B_2^2 \neq 0$). 则“ $A_1B_2 = A_2B_1$ 且 $A_1C_2 \neq A_2C_1$ ”是“直线 m 与 n 平行”

(A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件
(C) 必要非充分条件 (D) 既非充分又非必要条件

11. 过双曲线左焦点 F 且倾斜角为 60° 的直线交双曲线于 A 、 B 两点, 若 $|FA| = 4|FB|$, 则双曲线的离心率是

(A) $\frac{6}{5}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{3}{2}$

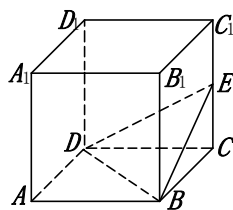
12. 曲线: $|x - y^2| = 1 - |x|$ 所围成图形的面积为

(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $\frac{3\pi}{2}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分.

13. 在一个斜坡上，沿着与坡脚的水平线成 45° 的直道上坡，如果行走了 40 米后升高了 $10\sqrt{2}$ 米，则坡面的倾斜度为_____.

14. 如图，已知点 E 是棱长为 1 的正方体 AC_1 的棱 CC_1 的中点，则点 C 到平面 EBD 的距离等于_____.



15. 直线 l 过点 $P(1,2)$ ，且与直线 $\sqrt{3}x - y + 5 = 0$ 的夹角是 $\frac{\pi}{6}$ ，则直线 l 的方程是_____.

16. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上一点 P 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离的最大值为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 12 分)

已知 x, y 满足：
$$\begin{cases} x + 3y - 4 \leq 0 \\ 3x + y + 4 \geq 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$$
，若 $z = 7x + \lambda y$ (其中 λ 为常数) 的最大值

是 8，求 $z = 7x + \lambda y$ 的最小值.

18. (本题满分 12 分)

(I) 设点 P, Q 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上的两点，且 $OP \perp OQ$ ，求

证： $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}$ 为定值.

(II) 设点 P, Q 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上的两点，且 $OP \perp OQ$ ，

试判断 $\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2}$ 是否为定值，如果是定值请指出该值. (本小题只需写明

结论即可，不必书写证明、求解过程)

19. (本题满分 12 分)

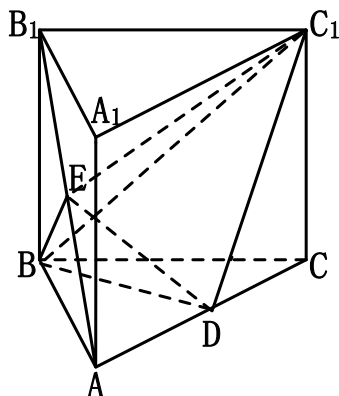
已知 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱, D 是 AC 的中点(如图).

(I) 证明: $AB_1 \parallel$ 平面 DBC_1 ;

(II) 若 $AB_1 \perp BC_1$, $BC = 2$.

① 求二面角 $D-BC_1-C$ 的大小;

② 若 E 为 AB_1 的中点,
求三棱锥 $E-BDC_1$ 的体积.

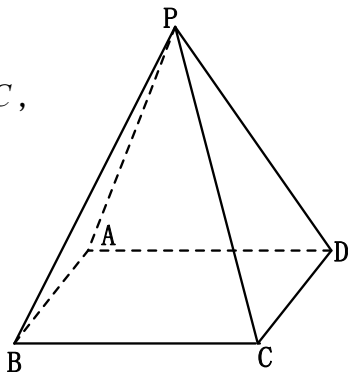


20. (本题满分 12 分)

如图, 正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB = 2$, 侧棱 PA 与底面 $ABCD$ 所成的角为 60° .

(I) 求侧面与底面所成的二面角(锐角)的大小;

(II) 在线段 PB 上是否存在一点 E , 使得 $AE \perp PC$,
若存在, 试确定点 E 的位置, 并加以证明, 若不存在
请说明理由.



21. (本小题满分 12 分)

设曲线 $C: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{x}$ 关于直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的对称曲线是 C' .

(I) 求曲线 C' 的方程;

(II) 判断曲线 C 的类型, 并求出其焦点坐标.

22. (本题满分 14 分)

已知抛物线 $y^2 = -4x$ 的焦点为 F , 其准线与 x 轴交于点 M , 过 M 作斜率为 k 的直线 l 与抛物线交于点 A 、 B . 线段 AB 的中点为 P , 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 $E(x_0, 0)$.

(I) 求: x_0 的取值范围;

(II) $\triangle PEF$ 能否成为以 EF 为底的等腰三角形? 若能, 求此时的 k 值; 若不能, 请说明理由.