

## 2016-2017 学年高一（上）期末数学试卷

一、填空题：本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 20 分）.

1. 已知  $A = \{x | x \leq 7\}$ ,  $B = \{x | x > 2\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.

2. 不等式  $\frac{2-x}{x+4} > 0$  的解集是\_\_\_\_\_.

3. 函数  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

4. 若  $x > 0$ , 则函数  $f(x) = \frac{2}{x} + x$  的最小值为\_\_\_\_\_.

5. 若函数  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}$ , 则  $f(x) + g(x) =$ \_\_\_\_\_.

6. 不等式  $|2x - 1| < 3$  的解集为\_\_\_\_\_.

7. 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = 2x^2 - x$ , 则  $f(1) =$ \_\_\_\_\_.

8. 已知函数  $f(x) = \log_3\left(\frac{4}{x} + 2\right)$ , 则方程  $f^{-1}(x) = 4$  的解  $x =$ \_\_\_\_\_.

9. 若函数  $f(x) = x^2 + \frac{a-1}{x}$  为偶函数, 则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.

10. 函数  $y = \frac{1-2^x}{2^x+3}$  的值域是\_\_\_\_\_.

11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \log_2 x & (x > 0) \\ 3^x & (x \leq 0) \end{cases}$ , 且函数  $F(x) = f(x) + x - a$  有且仅有两个

零点, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

12. 关于  $x$  的方程  $4^x - k \cdot 2^x + k + 3 = 0$ , 只有一个实数解, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 32 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的．

13. “ $x+y=3$ ”是“ $x=1$  且  $y=2$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件 D. 既不充分也必要条件

14. 下列各对函数中，相同的是（ ）

- A.  $f(x) = \lg x^2$ ,  $g(x) = 2 \lg x$

B.  $f(x) = \lg \frac{x+1}{x-1}$ ,  $g(x) = \lg(x+1) - \lg(x-1)$

C.  $f(u) = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$ ,  $g(v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$

D.  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \sqrt{x^2}$

15. 设  $a, b$  是非零实数, 若  $a < b$ , 则下列不等式成立的是 ( )

A.  $a^2 < b^2$  B.  $ab^2 < a^2b$  C.  $\frac{1}{ab^2} < \frac{1}{a^2b}$  D.  $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$

16. 若  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 则下列结论:

- ①  $y = |f(x)|$  是偶函数;
- ② 对任意的  $x \in \mathbb{R}$  都有  $f(-x) + |f(x)| = 0$ ;
- ③  $y = f(-x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递增;
- ④  $y = f(x)f(-x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递增.

其中正确结论的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 44 分. 解答写出文字说明、证明过程或演算过程.

17. 已知全集为  $\mathbb{R}$ , 集合  $A = \{x \mid \frac{x-3}{x+1} \leq 0\}$ , 集合  $B = \{x \mid |2x+1| > 3\}$ . 求  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)$ .

18. 设函数  $f(x) = a - \frac{2}{2^x + 1}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

- (1) 请你确定  $a$  的值, 使  $f(x)$  为奇函数;
- (2) 用单调性定义证明, 无论  $a$  为何值,  $f(x)$  为增函数.

19. 关于  $x$  的不等式  $\frac{x+2}{k} > 1 + \frac{x-3}{k^2}$  (其中  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ ).

- (1) 若  $x=3$  在上述不等式的解集中, 试确定  $k$  的取值范围;
- (2) 若  $k > 1$  时, 上述不等式的解集是  $x \in (3, +\infty)$ , 求  $k$  的值.

20. 已知  $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$  ( $x > 1$ )

- (1) 求  $f(x)$  的反函数及其定义域;
- (2) 若不等式  $(1 - \sqrt{x})f^{-1}(x) > a(a - \sqrt{x})$  对区间  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  恒成立, 求实

---

数  $a$  的取值范围.

21. 设  $a \in \mathbb{R}$ , 函数  $f(x) = x|x - a| + 2x$ .

(1) 若  $a=3$ , 求函数  $f(x)$  在区间  $[0, 4]$  上的最大值;

(2) 若存在  $a \in (2, 4]$ , 使得关于  $x$  的方程  $f(x) = t \cdot f(a)$  有三个不相等的实数解, 求实数  $t$  的取值范围.

## 2016-2017 学年高一（上）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题：本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 20 分）.

1. 已知  $A = \{x | x \leq 7\}$ ,  $B = \{x | x > 2\}$ , 则  $A \cap B = \underline{\{x | 2 < x \leq 7\}}$ .

【考点】交集及其运算.

【分析】由 A 与 B, 求出两集合的交集即可.

【解答】解:  $\because A = \{x | x \leq 7\}$ ,  $B = \{x | x > 2\}$ ,

$\therefore A \cap B = \{x | 2 < x \leq 7\}$ ,

故答案为:  $\{x | 2 < x \leq 7\}$

2. 不等式  $\frac{2-x}{x+4} > 0$  的解集是  $\underline{(-4, 2)}$ .

【考点】其他不等式的解法.

【分析】由不等式  $\frac{2-x}{x+4} > 0$  可得  $(x-2)(x+4) < 0$ , 解此一元二次不等式求得原不等式的解集.

【解答】解: 由不等式  $\frac{2-x}{x+4} > 0$  可得  $\frac{x-2}{x+4} < 0$ , 即  $(x-2)(x+4) < 0$ , 解得  $-4 < x < 2$ ,

故不等式的解集为  $(-4, 2)$ ,

故答案为  $(-4, 2)$ .

3. 函数  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$  的定义域是  $\underline{\{x | x \geq -2 \text{ 且 } x \neq 1\}}$ .

【考点】函数的定义域及其求法.

【分析】由题意即分母不为零、偶次根号下大于等于零, 列出不等式组求解, 最后要用集合或区间的形式表示.

【解答】解: 由题意, 要使函数有意义, 则  $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ ,

解得,  $x \neq 1$  且  $x \geq -2$ ;

故函数的定义域为：  $\{x|x \geq -2 \text{ 且 } x \neq 1\}$ ，

故答案为：  $\{x|x \geq -2 \text{ 且 } x \neq 1\}$ 。

4. 若  $x > 0$ ，则函数  $f(x) = \frac{2}{x} + x$  的最小值为  $2\sqrt{2}$ 。

【考点】基本不等式。

【分析】由  $x > 0$ ，直接运用基本不等式，计算即可得到最小值。

【解答】解：  $x > 0$ ，则函数  $f(x) = \frac{2}{x} + x \geq 2\sqrt{\frac{2}{x} \cdot x} = 2\sqrt{2}$ ，

当且仅当  $x = \sqrt{2}$  时， $f(x)$  取得最小值  $2\sqrt{2}$ 。

故答案为：  $2\sqrt{2}$ 。

5. 若函数  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ ， $g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}$ ，则  $f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{1-x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )。

【考点】函数解析式的求解及常用方法。

【分析】容易求出  $f(x)$ ， $g(x)$  的定义域，求交集便可得出  $f(x) + g(x)$  的定义域，并可求得  $f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{1-x}$ 。

【解答】解：  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ ， $g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}$ ；

解  $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$  得，  $0 \leq x \leq 1$ ；

$\therefore f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{1-x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )。

故答案为：  $1 + \sqrt{1-x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ )。

6. 不等式  $|2x - 1| < 3$  的解集为  $\{x | -1 < x < 2\}$ 。

【考点】不等式；绝对值不等式。

【分析】将  $2x - 1$  看成整体，利用绝对值不等式将原不等式转化成整式不等式，最后利用不等式基本性质求解即可。

【解答】解：  $\because |2x - 1| < 3$

$\Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3$

$\Leftrightarrow -1 < x < 2$ ，

$\therefore$  不等式  $|2x - 1| < 3$  的解集为  $\{x | -1 < x < 2\}$ 。

---

故答案为：  $\{x \mid -1 < x < 2\}$  .

7. 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数，当  $x \leq 0$  时， $f(x) = 2x^2 - x$ ，则  $f(1) = \underline{-3}$  .

【考点】函数的值.

【分析】根据函数奇偶性的性质求  $f(-1)$  即可求出  $f(1)$  的值.

【解答】解：  $\because f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数，

$$\therefore f(-1) = -f(1),$$

$$\because \text{当 } x \leq 0 \text{ 时, } f(x) = 2x^2 - x,$$

$$\therefore f(-1) = 2 + 1 = 3,$$

$$\therefore f(1) = -f(-1) = -3.$$

故答案为：  $-3$  .

8. 已知函数  $f(x) = \log_3\left(\frac{4}{x} + 2\right)$ ，则方程  $f^{-1}(x) = 4$  的解  $x = \underline{1}$  .

【考点】反函数；对数的运算性质.

【分析】根据互为反函数的两个函数间的关系知，欲求满足  $f^{-1}(x) = 4$  的  $x$  值，即求  $f(4)$  的值.

【解答】解：由题意得，即求  $f(4)$  的值

$$\because f(x) = \log_3\left(\frac{4}{x} + 2\right),,$$

$$\therefore f(4) = \log_3(1 + 2) = 1,$$

$$\therefore f(4) = 1.$$

即所求的解  $x = 1$  .

故答案为  $1$  .

9. 若函数  $f(x) = x^2 + \frac{a-1}{x}$  为偶函数，则实数  $a = \underline{1}$  .

【考点】函数奇偶性的性质.

【分析】根据偶函数的定义建立方程关系进行求解即可.

【解答】解：  $\because$  函数  $f(x) = x^2 + \frac{a-1}{x}$  为偶函数，

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\text{即 } x^2 - \frac{a-1}{x} = x^2 + \frac{a-1}{x},$$

$$\text{则 } \frac{a-1}{x} = 0, \text{ 则 } a=1,$$

故答案为：1

10. 函数  $y = \frac{1-2^x}{2^x+3}$  的值域是  $(-1, \frac{1}{3})$ .

【考点】函数的值域.

【分析】分离常数后，根据指数函数的值域即可求函数  $y$  的范围.

【解答】解：函数  $y = \frac{1-2^x}{2^x+3} = \frac{-(2^x+3)+4}{2^x+3} = -1 + \frac{4}{2^x+3}$ .

$$\because 2^x+3 > 3,$$

$$\therefore 0 < \frac{4}{2^x+3} < \frac{4}{3}.$$

$$\therefore \text{函数 } y = \frac{1-2^x}{2^x+3} \text{ 的值域是 } (-1, \frac{1}{3})$$

故答案为  $(-1, \frac{1}{3})$

11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \log_2 x & (x > 0) \\ 3^x & (x \leq 0) \end{cases}$ ，且函数  $F(x) = f(x) + x - a$  有且仅有两个

零点，则实数  $a$  的取值范围是  $a \leq 1$ .

【考点】函数零点的判定定理.

【分析】根据函数与方程的关系，将函数问题转化为两个函数的交点问题，利用数形结合进行求解即可.

【解答】解：由  $F(x) = f(x) + x - a = 0$  得  $f(x) = -x + a$ ,

作出函数  $f(x)$  和  $y = -x + a$  的图象如图：

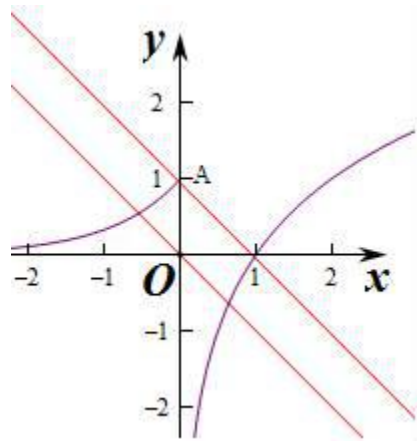
当直线  $y = -x + a$  经过点  $A(0, 1)$  时，两个函数有两个交点，

此时  $1 = -0 + a$ ，即  $a = 1$ ，

要使两个函数有两个交点，则  $a \leq 1$  即可，

故实数  $a$  的取值范围是  $a \leq 1$ ，

故答案为：  $a \leq 1$



12. 关于  $x$  的方程  $4^x - k \cdot 2^x + k + 3 = 0$ ，只有一个实数解，则实数  $k$  的取值范围是  $(-\infty, -3) \cup \{6\}$  .

【考点】函数的零点.

【分析】首先换元，令  $t = 2^x$ ，则关于  $t$  方程  $t^2 - kt + k + 3 = 0$  只有一个正根，根据根与系数的关系写出一元二次方程要满足的条件，得到结果.

【解答】解：设  $t = 2^x$ ， $t > 0$

$x$  的方程  $4^x - k \cdot 2^x + k + 3 = 0$  转化为  $t^2 - kt + k + 3 = 0$ ，设  $f(t) = t^2 - kt + k + 3$ ，

原方程只有一个根，则换元以后的方程有一个正根，

$\therefore f(0) < 0$ ，或  $\Delta = 0$ ，

$\therefore k < -3$ ，或  $k = 6$

故答案为  $(-\infty, -3) \cup \{6\}$  .

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 32 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

13. “ $x + y = 3$ ”是“ $x = 1$  且  $y = 2$ ”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件 D. 既不充分也必要条件

【考点】必要条件、充分条件与充要条件的判断.

【分析】根据充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【解答】解：当  $x=0$ ,  $y=3$  时，满足  $x+y=3$ ，但  $x=1$  且  $y=2$  不成立，即充分性不成立，

若  $x=1$  且  $y=2$ ，则  $x+y=3$  成立，即必要性成立，

即“ $x+y=3$ ”是“ $x=1$  且  $y=2$ ”的必要不充分条件，

故选：B

14. 下列各对函数中，相同的是 ( )

A.  $f(x) = \lg x^2$ ,  $g(x) = 2\lg x$

B.  $f(x) = \lg \frac{x+1}{x-1}$ ,  $g(x) = \lg(x+1) - \lg(x-1)$

C.  $f(u) = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$ ,  $g(v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$

D.  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \sqrt{x^2}$

【考点】判断两个函数是否为同一函数.

【分析】对于 A，通过定义域判断是不是相同的函数；

对于 B 求出函数的定义域，即可判断是不是相同的函数；

对于 C：判断是否满足相同函数的要求即可；

对于 D：通过对应关系以及值域即可判断是不是相同的函数.

【解答】解：对于 A:  $f(x) = \lg x^2$ ,  $g(x) = 2\lg x$  两个函数的定义域不同，不是相同的函数；

对于 B:  $f(x) = \lg \frac{x+1}{x-1}$ ,  $g(x) = \lg(x+1) - \lg(x-1)$  函数底的定义域不同，不是相同的函数；

对于 C:  $f(u) = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$ ,  $g(v) = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$ ，满足相同函数的要求，是相同的函数；

对于 D:  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \sqrt{x^2}$ ，定义域相同，都是对应关系以及值域不同，不是相同的函数.

故选 C.

15. 设  $a, b$  是非零实数, 若  $a < b$ , 则下列不等式成立的是 ( )

A.  $a^2 < b^2$  B.  $ab^2 < a^2b$  C.  $\frac{1}{ab^2} < \frac{1}{a^2b}$  D.  $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$

【考点】一元二次不等式的应用; 不等关系与不等式.

【分析】由不等式的相关性质, 对四个选项逐一判断, 由于  $a, b$  为非零实数, 故可利用特例进行讨论得出正确选项

【解答】解: A 选项不正确, 因为  $a = -2, b = 1$  时, 不等式就不成立;

B 选项不正确, 因为  $a = 1, b = 2$  时, 不等式就不成立;

C 选项正确, 因为  $\frac{1}{ab^2} < \frac{1}{a^2b} \Leftrightarrow a < b$ , 故当  $a < b$  时一定有  $\frac{1}{ab^2} < \frac{1}{a^2b}$ ;

D 选项不正确, 因为  $a = 1, b = 2$  时, 不等式就不成立;

选项正确, 因为  $y = 2^x$  是一个增函数, 故当  $a > b$  时一定有  $2^a > 2^b$ ,

故选 C.

16. 若  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 则下列结论:

①  $y = |f(x)|$  是偶函数;

② 对任意的  $x \in \mathbb{R}$  都有  $f(-x) + |f(x)| = 0$ ;

③  $y = f(-x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递增;

④  $y = f(x)f(-x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递增.

其中正确结论的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【考点】命题的真假判断与应用.

【分析】由  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 知:  $y = |f(x)|$  是偶函数; 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 不一定有  $f(-x) + |f(x)| = 0$ ;  $y = f(-x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递减;  $y = f(x)f(-x) = -[f(x)]^2$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递减.

【解答】解:  $\because f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore y = |f(x)|$  是偶函数, 故①正确;

对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 不一定有  $f(-x) + |f(x)| = 0$ , 故②不正确;

$y = f(-x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递减, 故③不正确;

$y=f(x)f(-x)=-[f(x)]^2$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递增, 故④正确.

故选 B.

三、解答题: 本大题共 5 小题, 共 44 分. 解答写出文字说明、证明过程或演算过程.

17. 已知全集为  $R$ , 集合  $A=\{x|\frac{x-3}{x+1}\leq 0\}$ , 集合  $B=\{x||2x+1|>3\}$ . 求  $A\cap(C_R B)$ .

【考点】交、并、补集的混合运算.

【分析】化简集合  $A$ 、 $B$ , 根据补集与交集的定义写出  $A\cap(C_R B)$  即可.

【解答】解: 全集为  $R$ , 集合  $A=\{x|\frac{x-3}{x+1}\leq 0\}=\{x|-1<x\leq 3\}$ ,

集合  $B=\{x||2x+1|>3\}=\{x|2x+1>3 \text{ 或 } 2x+1<-3\}=\{x|x>1 \text{ 或 } x<-2\}$ ,

所以  $C_R B=\{x|-2\leq x\leq 1\}$ ,

$A\cap(C_R B)=\{x|-1<x\leq 1\}$ .

18. 设函数  $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$  ( $a\in R$ ).

(1) 请你确定  $a$  的值, 使  $f(x)$  为奇函数;

(2) 用单调性定义证明, 无论  $a$  为何值,  $f(x)$  为增函数.

【考点】函数单调性的判断与证明; 函数奇偶性的判断.

【分析】(1) 根据函数奇偶性的定义进行判断即可.

(2) 根据函数单调性的定义进行证明即可.

【解答】解: (1)  $\because$  函数  $f(x)$  是  $R$  上的奇函数,

$$\therefore f(0)=a-\frac{2}{1+1}=0,$$

$$\therefore a=1;$$

(2) 证明: 任取:  $x_1<x_2\in R$ ,

$$\therefore f(x_1)-f(x_2)=a-\frac{2}{2^{x_1}+1}-a+\frac{2}{2^{x_2}+1}=2\cdot\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$$

$$\because x_1<x_2,$$

$$\therefore 2^{x_1}<2^{x_2},$$

$$\text{又 } 2^{x_1} + 1 > 0, \quad 2^{x_2} + 1 > 0,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0,$$

$$\text{即 } f(x_1) < f(x_2),$$

$\therefore f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上的单调递增.

19. 关于  $x$  的不等式  $\frac{x+2}{k} > 1 + \frac{x-3}{k^2}$  (其中  $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ ).

(1) 若  $x=3$  在上述不等式的解集中, 试确定  $k$  的取值范围;

(2) 若  $k > 1$  时, 上述不等式的解集是  $x \in (3, +\infty)$ , 求  $k$  的值.

**【考点】** 其他不等式的解法.

**【分析】** (1) 若  $x=3$  在上述不等式的解集中, 即  $x=3$ , 求解关于  $k$  的不等式  $\frac{x+2}{k} > 1 + \frac{x-3}{k^2}$  即可.

(2) 根据不等式与方程的思想求解, 移项通分, 化简, 利用  $x=3$  求解  $k$  的值.

**【解答】** 解: (1) 由题意:  $x=3$  时, 不等式  $\frac{x+2}{k} > 1 + \frac{x-3}{k^2}$  化简为  $\frac{5}{k} > 1$ , 即  $\frac{5}{k} - 1 > 0$ ,

$$\text{可得 } (5 - k)k > 0,$$

$$\text{解得: } 0 < k < 5.$$

$\therefore$  当  $x=3$  在上述不等式的解集中,  $k$  的取值范围是  $(0, 5)$

(2) 不等式  $\frac{x+2}{k} > 1 + \frac{x-3}{k^2}$  化简可得  $\frac{x+2}{k} > \frac{k^2+x-3}{k^2}$  (其中  $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ ).

$$\because k > 1,$$

$$\text{可得: } \frac{x+2}{k} > \frac{k^2+x-3}{k^2} \Leftrightarrow kx+2k > k^2+x-3$$

不等式的解集是  $x \in (3, +\infty)$ ,  $\therefore x=3$  是方程  $kx+2k=k^2+x-3$  的解.

$$\text{即 } 3k+2k=k^2,$$

$$\because k \neq 0,$$

$$\therefore k=5.$$

故得若  $k > 1$  时, 不等式的解集是  $x \in (3, +\infty)$  时  $k$  的值为 5.

20. 已知  $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 (x > 1)$

(1) 求  $f(x)$  的反函数及其定义域;

(2) 若不等式  $(1 - \sqrt{x}) f^{-1}(x) > a(a - \sqrt{x})$  对区间  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

【考点】函数恒成立问题; 反函数.

【分析】(1) 求出  $f(x)$  的值域, 即  $f^{-1}(x)$  的定义域, 令  $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ , 解得  $x = \frac{\sqrt{y}+1}{1-\sqrt{y}}$ , 可得  $f^{-1}(x)$ .

(2) 不等式  $(1 - \sqrt{x}) f^{-1}(x) > a(a - \sqrt{x})$  在区间  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  恒成立  $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 > a^2 - a\sqrt{x}$  在区间  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  恒成立,  $\sqrt{x}(1+a) > a^2 - 1$  对区间  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  恒成立.

【解答】解: (1)  $\because x > 1, \therefore 0 < f(x) < 1$ . 令  $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 (x > 1)$ , 解得  $x = \frac{\sqrt{y}+1}{1-\sqrt{y}}$ ,

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} (0 < x < 1)$ ;

(2)  $\because f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} (0 < x < 1)$ ,  $\therefore$  不等式  $(1 - \sqrt{x}) f^{-1}(x) > a(a - \sqrt{x})$  在区间  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  恒成立  $\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 > a^2 - a\sqrt{x}$  在区间  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  恒成立,  $\sqrt{x}(1+a) > a^2 - 1$  对区间  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  恒成立.

当  $a = -1$  时, 不成立,

当  $a > -1$  时,  $a < \sqrt{x}+1$  在区间  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  恒成立,  $a < (\sqrt{x}+1)_{\min}$ ,  $-1 < a < \frac{3}{2}$ .

当  $a < -1$  时,  $a > \sqrt{x}+1$  在区间  $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  恒成立,  $a > (\sqrt{x}+1)_{\max}$ ,  $a$  无解.

综上: 实数  $a$  的取值范围:  $-1 < a < \frac{3}{2}$ .

21. 设  $a \in \mathbb{R}$ , 函数  $f(x) = x|x - a| + 2x$ .

(1) 若  $a=3$ , 求函数  $f(x)$  在区间  $[0, 4]$  上的最大值;

(2) 若存在  $a \in (2, 4]$ , 使得关于  $x$  的方程  $f(x) = t \cdot f(a)$  有三个不相等的实数解, 求实数  $t$  的取值范围.

【考点】分段函数的应用; 根的存在性及根的个数判断.

【分析】(1) 求出  $f(x)$  的分段函数式, 运用二次函数的性质, 可得单调区间, 求得最大值;

(2) 将  $x$  分区间进行讨论, 去绝对值写出解析式, 求出单调区间, 将  $a$  分区间讨论, 求出单调区间解出即可.

【解答】解: (1) 当  $a=3$ ,  $x \in [0, 4]$  时,  $f(x) = x|x-3| + 2x = \begin{cases} x^2 - x, & 3 \leq x \leq 4 \\ 5x - x^2, & 0 \leq x < 3 \end{cases}$ ,

可知函数  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{5}{2}]$  递增, 在  $(\frac{5}{2}, 3]$  上是减函数, 在  $[3, 4]$  递增,

则  $f(\frac{5}{2}) = \frac{25}{4}$ ,  $f(4) = 12$ ,

所以  $f(x)$  在区间  $[0, 4]$  上的最大值为  $f(4) = 12$ .

(2)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + (2-a)x, & x \geq a \\ -x^2 + (2+a)x, & x < a \end{cases}$ ,

① 当  $x \geq a$  时, 因为  $a > 2$ , 所以  $\frac{a-2}{2} < a$ .

所以  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上单调递增.

② 当  $x < a$  时, 因为  $a > 2$ , 所以  $\frac{a+2}{2} < a$ .

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{a+2}{2})$  上单调递增, 在  $[\frac{a+2}{2}, a]$  上单调递减.

当  $2 < a \leq 4$  时, 知  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{a+2}{2}]$  和  $[a, +\infty)$  上分别是增函数,

在  $[\frac{a+2}{2}, a]$  上是减函数,

当且仅当  $2a < t \cdot f(a) < \frac{(a+2)^2}{4}$  时,

方程  $f(x) = t \cdot f(a)$  有三个不相等的实数解.

即  $1 < t < \frac{(a+2)^2}{8a} = \frac{1}{8} (a + \frac{4}{a} + 4)$ .

令  $g(a) = a + \frac{4}{a}$ ,  $g(a)$  在  $a \in (2, 4]$  时是增函数,

---

故  $g(a)_{\max}=5$ .

$\therefore$  实数  $t$  的取值范围是  $(1, \frac{9}{8})$ .

