2010--2011学年度上学期期末考试高二年级数学理科试卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知命题 $p:\forall x\in[0,+\infty),(\log_4 3)^x\le 1$，则下列叙述正确的是（　　）

A. $\neg p:\forall x\in[0,+\infty),(\log_4 3)^x>1$　　B. $\neg p:\forall x\in[0,+\infty),(\log_4 3)^x<1$

C. $\neg p:\exists x\in[0,+\infty),(\log_4 3)^x>1$　　D. $\neg p:\exists x\in[0,+\infty),(\log_4 3)^x<1$

2. 若 $b<a<0$，则下列不等式中正确的是（　　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $|a|>|b|$　　C. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　D. $a+b>ab$

3．已知不等式 $|x-m|<1$ 成立的一个充分不必要条件是 $\frac{1}{2}<x<1$，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $0<m<\frac{3}{2}$　　B. $0\le m\le\frac{3}{2}$　　C. $m<0$ 或 $m>\frac{3}{2}$　　D. $0\le m\le 1$

4. 两个正数 a、b 的等差中项是 $\frac{9}{2}$，一个等比中项是 $2\sqrt{5}$，且 $a>b$, 则双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为（　　）

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{41}}{4}$　　C. $\frac{5}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{41}}{5}$

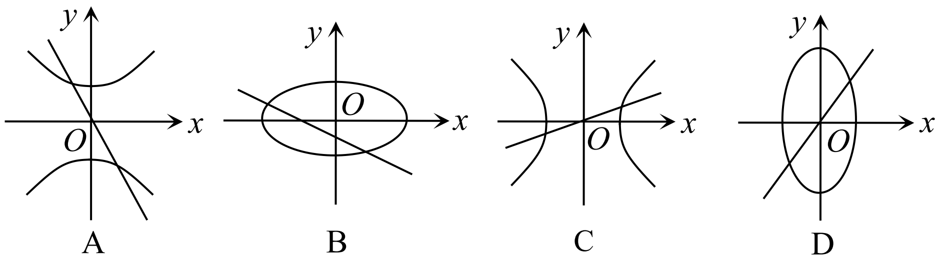
5. 抛物线 $y^2=8x$ 的焦点到双曲线 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ 的渐近线的距离为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

6.我国发射的“神舟七号”飞船的运行轨道是以地球的中心 F_2 为一个焦点的椭圆，近地点 A 距地面为m千米，远地点 B 距地面为 n 千米，地球半径为 R 千米，则飞船运行轨道的短轴长为（　　）

A. $2\sqrt{(m+R)(n+R)}$　　B. $\sqrt{(m+R)(n+R)}$　　C. mn　　D. $2mn$

7. 设a、b是非零实数，则方程$bx^2+ay^2=ab$及$ax+by=0$所表示的图形可能是（　　）



8. 下列各组向量不平行的是（　　　）

A.　$\vec{a}=(1,0,0),\vec{b}=(-3,0,0)$　　　B.　$\vec{a}=(0,1,0),\vec{b}=(1,0,1)$

C.　$\vec{a}=(0,1,-1),\vec{b}=(0,-1,1)$　　　D.　$\vec{a}=(1,0,0),\vec{b}=(0,0,0)$

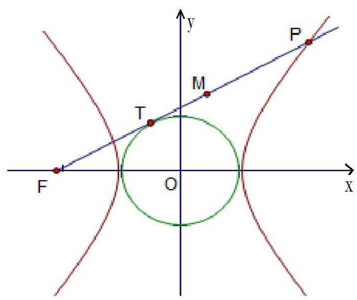
9. 在R上定义运算⊗：x⊗y＝x(1－y)　若不等式(x－a)⊗(x＋a)<1对任意实数x成立.则(　　)

A.　$-1<a<1$　　B.　$0<a<2$　　C.　$-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$　　D.　$-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$

10．已知正项等比数列$\{a_n\}$满足：$a_7=a_6+2a_5$，若存在两项a_m,a_n使得$\sqrt{a_ma_n}=4a_1$，则$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$的最小值为（　　）

A.　$\frac{3}{2}$　　B.　$\frac{5}{3}$　　C.　$\frac{25}{6}$　　D.　不存在

11. 从双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左焦点$F$引圆$x^2+y^2=a^2$的切线，切点为$T$，延长$FT$交双曲线右支于$P$点，若$M$为线段$FP$的中点，$O$为坐标原点，则$|MO|-|MT|$与$b-a$的大小关系为　（　　）



A. $|MO|-|MT|>b-a$　　　B. $|MO|-|MT|=b-a$

C. $|MO|-|MT|<b-a$　　　D. 不确定

12．点$P(x,\ y)$满足平面区域：$\begin{cases}\cos\theta\le x\le 3\cos\theta\\ \sin\theta\le y\le 3\sin\theta\end{cases}(\theta\in R)$，点$M(x,\ y)$满足：$(x+5)^2+(y+5)^2=1$，则$|\overrightarrow{PM}|$的最小值是（　　）

A．$5\sqrt{2}$　　B．$4\sqrt{2}-1$　　C．$6\sqrt{2}-1$　　D．$\sqrt{61}-1$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13. 如果平面的一条斜线和它在这个平面上的射影的方向向量分别是 $\vec{a}=(1,01),\vec{b}=(0,1,1)$ 那么这条斜线与平面所成的角是 ____________

14. 不等式 $\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x-12}$ ≤0 的解集是___________________

15．两个等差数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 A_n，B_n，且 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}$，则 $\dfrac{a_5}{b_6}=$____

16. 已知点 $A(3,\sqrt{3})$，O 是坐标原点，点 $P(x,y)$ 的坐标满足 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y\le 0\\ x-\sqrt{3}y+2\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$，设 z 为 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OP}$ 上的射影的数量，则 z 的取值范围是_____________

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17.（本小题满分 10 分）已知条件 p：$|5x-1|>a$ 和条件 q：$\dfrac{1}{2x^2-3x+1}>0$，请选取适当的实数 a 的值，分别利用所给的两个条件作为 A、B 构造命题“若 A 则 B”，并使得构造的原命题为真命题，而其逆命题为假命题，则这样的一个原命题可以是什么？并说明为什么这一命题是符合要求的命题.

18.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=-4x+b$，且不等式 $|f(x)|<c$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$，

（1）求 b 的值；

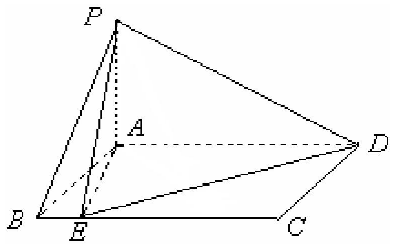
（2）解关于 x 的不等式 $(4x+m)f(x)>0(m\in R)$

19.（本小题满分 12 分）上海某玩具厂生产 x 套世博吉祥物“海宝”所需成本费用为 P 元，且 $P=1000+5x+\dfrac{1}{10}x^2$，而每套“海宝”售出的价格为 Q 元，其中 $Q=a+\dfrac{x}{b}$ $(a,b\in R)$，

（1）问：该玩具厂生产多少套“海宝”时，使得每套所需成本费用最少？

（2）若生产出的“海宝”能全部售出，且当产量为150套时利润最大，此时每套价格为30元，求a，b的值.（利润 = 销售收入-成本）

20.（本小题满分12分）如图，矩形$ABCD$所在平面与平面PAD垂直，$PA\perp AD$，且$AD=2AB$，E为BC上的动点.



（Ⅰ）当E为BC的中点时，求证：$PE\perp DE$；

（Ⅱ）若$PA=AB$，在线段BC上是否存在点E，使得二面角$P-ED-A$的大小为$\dfrac{\pi}{4}$．若存在，确定点E的位置，若不存在，说明理由.

21.（本小题满分12分）

数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=3$，点(S_n,S_{n+1})在直线$y=\dfrac{n+1}{n}x+n+1(n\in\mathbf{N}^*)$上.

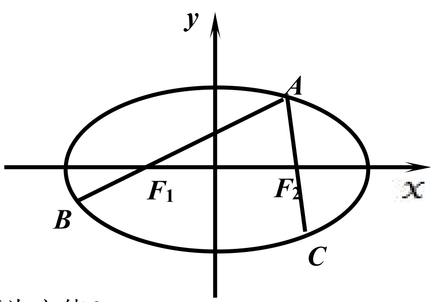
⑴求证：数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等差数列；

⑵若数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n\cdot 2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n；

⑶设$C_n=\dfrac{T_n}{2^{2n+3}}$，求证：$C_1+C_2+\cdots+C_n>\dfrac{20}{27}$.

22.（本小题满分12分）

如图，A为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上的一个动点，弦$AB$、$AC$分别过焦点$F_1$、$F_2$，当$AC$垂直于$x$轴时，恰好有$|AF_1|:|AF_2|=3:1$.



（Ⅰ）求椭圆的离心率；

（Ⅱ）设$\overrightarrow{AF_1}=\lambda_1\overrightarrow{F_1B}$，$\overrightarrow{AF_2}=\lambda_2\overrightarrow{F_2C}$.

①当A点恰为椭圆短轴的一个端点时，求$\lambda_1+\lambda_2$的值；

②当A点为该椭圆上的一个动点时，试判断$\lambda_1+\lambda_2$是否为定值？若是，请证明；若不是，请说明理由.

2010--2011学年度上学期期末考试高二年级数学理科答案

一、选择题　1—5　C C B D A　6—10 A C　B C A　11-12 B D

二、填空题　13. 60^0　14. $\left\{x \middle| -\frac{3}{4} < x \le -\frac{1}{2}\text{或}3 \le x < 4\right\}$　15. $\frac{54}{7}$　16. $[-3,3]$

三、解答题

17.（满分 10 分）解：已知条件 p 即 $5x-1<-a$ 或 $5x-1>a$，

$\therefore x<\frac{1-a}{5}$或 $x>\frac{1+a}{5}$，

已知条件 q 即 $2x^2-3x+1>0$，

$\therefore x<\frac{1}{2}$或 $x>1$；…………..6 分

令 $a=4$，则 p 即 $x<-\frac{3}{5}$或 $x>1$，此时必有 $p\Rightarrow q$ 成立，反之不然.

故可以选取的一个实数是 $a=4$，A 为 p，B 为 q，对应的命题是若 p 则 q，

由以上过程可知这一命题的原命题为真命题，但它的逆命题为假命题.

………10 分

(注：本题为一开放性命题，答案不唯一，只需满足 $a \ge 4$ 即可).

18.（满分 12 分）解:（1）由 函数 $f(x)=-4x+b$，且不等式 $|f(x)|<c$ 的

解集为 $\{x|-1<x<2\}$ 知　$|-4x+b|<c$，$\frac{b-c}{4}<x<\frac{b+c}{4}$

$\begin{cases}\frac{b-c}{4}=-1\\ \frac{b+c}{4}=2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2\\ c=6\end{cases}$　　所以 $b=2$ ……………　4 分

（2）由 $(4x+m)(-4x+2)>0$ 得 $(4x+m)(2x-1)<0$ ……..　5 分

①当 $-\frac{m}{4}>\frac{1}{2}$　即m<-2时　　$\left\{x \middle| \frac{1}{2}<x<-\frac{m}{4}\right\}$

②当 $-\frac{m}{4}=\frac{1}{2}$　即　m=-2时　　不等式的解集为空集

③当 $-\frac{m}{4}<\frac{1}{2}$　即 $m>-2$ 时　　$\left\{x \middle| -\frac{m}{4}<x<\frac{1}{2}\right\}$……….　10 分

综上：$m<-2$　　$\left\{x \middle| \frac{1}{2}<x<-\frac{m}{4}\right\}$

$m=-2$　　　空集

$m>-2$　　$\left\{x\left|-\frac{m}{4}<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$ …………………… １２分.

19.（满分 12 分）解：（1）每套"海宝"所需成本费用为：

$$\frac{P}{x}=\frac{1000+5x+\frac{1}{10}x^2}{x}=\frac{1}{10}x+\frac{1000}{x}+5\geq 2\sqrt{100}+5=25$$ ……………4 分

当 $\frac{1}{10}x=\frac{1000}{x}$，　即 x=100 时，每套"海宝"所需成本费用最少为 25 元. …6 分

（2）利润为：$Qx-P=x(a+\frac{x}{b})-(1000+5x+\frac{x^2}{10})$

$$=(\frac{1}{b}-\frac{1}{10})x^2+(a-5)x-1000$$ ……………9 分

由题意，$\begin{cases}\dfrac{5-a}{2(\frac{1}{b}-\frac{1}{10})}=150\\ a+\dfrac{150}{b}=30\end{cases}$　　　$a=25,b=30$ ……………………12 分

20.（满分 12 分）方法一：不妨设 $AB=1$，则 $BC=2$.

（Ⅰ）证明：当 E 为 BC 中点时，$EC=CD=1$，

从而 ΔDCE 为等腰直角三角形，$\therefore\angle DEC=45^\circ$，

同理可得 $\angle AEB=45^\circ$，$\therefore\angle AED=90^\circ$，

于是 $DE\perp AE$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

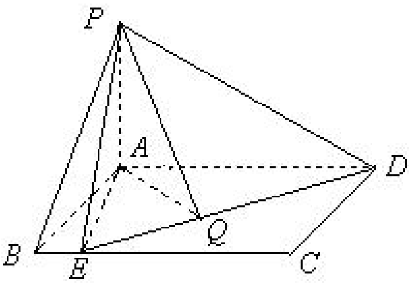
$PA\perp AD\ \therefore PA\perp$ 平面 $ABCD$，　　$DE\subset$ 平面ABCD

$\therefore PA\perp DE$　$DE\perp$ 平面PAE，又 $PE\subset$ 平面PAE，$\therefore DE\perp PE$. ………………6 分

（Ⅱ）若线段 BC 上存在点 E，使二面角 $P-ED-A$ 为 $\frac{\pi}{4}$。

过点 A 作 $AQ\perp DE$ 于 Q，连接 PQ，由(1) PA $\perp$ 面ABCD　所以 $PQ\perp DE$

$\angle PQA$ 为二面角 $P-ED-A$ 的平面角，



$\angle PQA=\dfrac{\pi}{4}$ ……………………………..8 分

设 $AB=PA=1$，则 $Rt\triangle PAQ$ 中 $AQ=1$，在 $Rt\triangle AQD$ 中

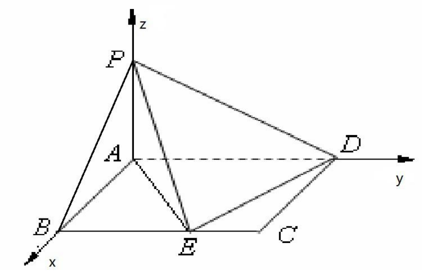
由 $AQ=1$， $AD=2$ 得 $\angle ADQ=\dfrac{\pi}{6}$，则 $\angle DEC=\dfrac{\pi}{6}$，在

$Rt\triangle DEC$ 中 $EC=\sqrt{3}$，所以 $BE=2-\sqrt{3}$，所以线段 BC 上存在点 E，当 $BE=2-\sqrt{3}$

时，二面角 $P-ED-A$ 为 $\dfrac{\pi}{4}$。 .12 分

方法二：∵平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面

$ABCD=AD$，$PA\perp AD$ ∴ $PA\perp$ 平面 $ABCD$，



以 A 为原点，AB,AD,AP 所在直线为 x,y,z 轴，

建立空间直角坐标系如图. ……………………2 分

（Ⅰ）不妨设 $AP=a$，AB=1

则 $P(0,0,a),E(1,1,0),D(0,2,0)$，

从而 $\overrightarrow{PE}=(1,1,-a),\overrightarrow{DE}=(1,-1,0)$，…………………………4 分

于是 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{DE}=(1,1,-a)\cdot(1,-1,0)=1-1=0$，

所以 $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{DE}$，所以 $PE\perp DE$ ……………………………………6 分

（Ⅱ）设 $BE=x$，则 $P(0,0,1),E(1,x,0),D(0,2,0)$，

$\overrightarrow{PE}=(1,x,-1),\overrightarrow{DE}=(1,x-2,0)$. ……………………………………………8 分

易知向量 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$ 为平面 AED 的一个法向量. 设平面 PDE 的法向量

$\vec{n}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+bx-c=0\\ a+b(x-2)=0\end{cases}$，解得 $c=2b$，令 $b=1$，则 $c=2$，$a=2-x$，

从而 $\vec{n}=(2-x,1,2)$，……………………………………………………10 分

依题意$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$\frac{2}{\sqrt{(x-2)^2+5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得$x_1=2+\sqrt{3}$（舍去），$x_1=2-\sqrt{3}$

所以点E在线段BC上距B点$2-\sqrt{3}$处. ……………………………………12 分

21.（满分 12 分）(1)∵点(S_n,S_{n+1})在直线$y=\frac{n+1}{n}x+n+1\ (n\in\mathbf{N}^*)$上，

∴$S_{n+1}=\frac{n+1}{n}S_n+n+1$.

两边同除以$n+1$，得$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=1$，$\frac{s_1}{1}=\frac{a_1}{1}=3$

于是$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以3为首项，1为公差的等差数列. ………………. . 4 分

(2)由(1)可知，$\frac{S_n}{n}=3+(n-1)\times1=n+2$，即$S_n=n^2+2n(n\in\mathbf{N}^*)$，

∴当$n=1$时，$a_1=3$，

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n+1$，

经检验，当$n=1$时也成立，∴$a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

于是$b_n=a_n\cdot2^{a_n}=(2n+1)\cdot2^{2n+1}$.

∵$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=3\cdot2^3+5\cdot2^5+\cdots+(2n-1)\cdot2^{2n-1}+(2n+1)\cdot2^{2n+1}$，

∴$4T_n=3\cdot2^5+\cdots+(2n-3)\cdot2^{2n-1}+(2n-1)\cdot2^{2n+1}+(2n+1)\cdot2^{2n+3}$，

相减，解得：$T_n=\left(\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}\right)\cdot2^{2n+3}-\frac{8}{9}$. ……………………8 分

(3)∵$C_n=\frac{T_n}{2^{2n+3}}=\frac{2n}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cdot(\frac{1}{4})^n$，

$$\therefore C_1+C_2+\cdots+C_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{9}\cdot n-\frac{1}{9}\cdot\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{3n^2+4n}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\cdot(\frac{1}{4})^n$$

$$>\frac{3n^2+4n}{9}-\frac{1}{27}\geqslant\frac{7}{9}-\frac{1}{27}=\frac{20}{27}.$$ …………………. 12 分

22. （满分 12 分）

（Ⅰ）法一：设$|AF_2|=m$，则$\left|AF_1\right|=3m$. 由题设及椭圆定义得

$\begin{cases}(3m)^2-m^2=(2c)^2\\3m+m=2a\end{cases}$，消去 m 得 $a^2=2c^2$，所以离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$． ………………2 分

法二：由椭圆方程得，$\left|AF_2\right|=\dfrac{b^2}{a}$，又 $\left|AF_1\right|:\left|AF_2\right|=3:1$，$\therefore 2a-\dfrac{b^2}{a}=3\cdot\dfrac{b^2}{a}$，即

$a^2=2b^2$，可求 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(Ⅱ)法一：由(Ⅰ)知，$b^2=c^2=\dfrac{1}{2}a^2$，所以椭圆方程可化为 $x^2+2y^2=2c^2$.

①当 A 点恰为椭圆短轴的一个端点时，$\lambda_1=\lambda_2$，直线 AF_1 的方程为 $y=x+c$.

由 $\begin{cases}y=x+c\\x^2+2y^2=2c^2\end{cases}$ 得 $3x^2+4cx=0$，解得 $x_1=0,x_2=-\dfrac{4}{3}c$，

∴点 B 的坐标为 $(-\dfrac{4}{3}c,-\dfrac{1}{3}c)$.

又 $F_1(-c,0)$，所以 $|F_1B|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}c$，$|AF_1|=\sqrt{2}c$，所以 $\lambda_1=3$，$\lambda_1+\lambda_2=6$. ………5 分

②当 A 点为该椭圆上的一个动点时，$\lambda_1+\lambda_2$ 为定值 6.

证明：设 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，则 ${x_0}^2+2{y_0}^2=a^2$.

若 A 为椭圆的长轴端点，则 $\lambda_1=\dfrac{a+c}{a-c},\lambda_2=\dfrac{a-c}{a+c}$, 或 $\lambda_1=\dfrac{a-c}{a+c},\lambda_2=\dfrac{a+c}{a-c}$，

所以 $\lambda_1+\lambda_2=\dfrac{2(a^2+c^2)}{a^2-c^2}=6$. ………………7 分

若 A 为椭圆上异于长轴端点的任意一点，则由 $\overline{AF_1}=\lambda_1\overline{F_1B}$, $\overline{AF_2}=\lambda_2\overline{F_2C}$ 得，

$\lambda_1=-\dfrac{y_0}{y_1},\lambda_2=-\dfrac{y_0}{y_2}$，所以 $\lambda_1+\lambda_2=-y_0(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2})$.

又直线 AF_1 的方程为 $x+c=\dfrac{x_0+c}{y_0}y$，所以由 $\begin{cases}x+c=\dfrac{x_0+c}{y_0}y\\x^2+2y^2=2c^2\end{cases}$ 得

$[2{y_0}^2+(x_0+c)^2]y^2-2cy_0(x_0+c)y-c^2{y_0}^2=0$.

$\because x_0{}^2+2y_0{}^2=2c^2$，$\therefore (3c+2x_0)y^2-2y_0(x_0+c)y-cy_0{}^2=0$.

由韦达定理得　$y_0y_1=-\dfrac{cy_0{}^2}{3c+2x_0}$，所以 $y_1=-\dfrac{cy_0}{3c+2x_0}$.　同理 $y_2=\dfrac{cy_0}{-3c+2x_0}$.

$\therefore \lambda_1+\lambda_2=-y_0(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2})=-y_0(-\dfrac{3c+2x_0}{cy_0}+\dfrac{-3c+2x_0}{cy_0})=6$.

综上证得，当 A 点为该椭圆上的一个动点时，$\lambda_1+\lambda_2$ 为定值 6. ………………12 分

法二：设 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AF_1}=(-c-x_0,-y_0),\overrightarrow{FB_1}=(x_1+c,y_1)$

$\because \overrightarrow{AF_1}=\lambda_1\overrightarrow{FB_1}$，$\therefore x_1=-\dfrac{c+x_0}{\lambda_1}-c,y_1=-\dfrac{y_0}{\lambda_1}$；　………………6 分

又 $x_0{}^2+2y_0{}^2=2c^2$ ①，$x_1{}^2+2y_1{}^2=2c^2$ ②，将 x_1、y_1 代入②得：

$$(\frac{c+x_0}{\lambda_1}+c)^2+2(\frac{y_0}{\lambda_1})^2=2c^2 \quad \text{即} (c+x_0+c\lambda_1)^2+2y_0{}^2=2\lambda^2{}_1c^2 \text{ ③；}$$

③－①得：$2x_0=c\lambda_1-3c$；　……………10 分

同理：由 $\overrightarrow{AF_2}=\lambda_2\overrightarrow{FB_2}$ 得 $2x_0=-c\lambda_2+3c$，$\therefore c\lambda_1-3c=-c\lambda_2+3c$，

$\therefore \lambda_1+\lambda_2=6$.　……………12 分