2014-2015 学年度上学期期中阶段测试

高二理科数学试卷

考试时间:120 分钟　　试题满分:150 分

一．选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）若命题 $p:\exists\ x\in\mathbf{R}$, $x^2-3x+1>0$, 则$\neg p$ 为（　　）

（A）$\forall\ x\in\mathbf{R}$, $x^2-3x+1\geq 0$　　（B）$\exists\ x\in\mathbf{R}$, $x^2-3x+1\leq 0$

（C）$\forall\ x\in\mathbf{R}$, $x^2-3x+1\leq 0$　　（D）$\exists\ x\in\mathbf{R}$, $x^2-3x+1\geq 0$

（2）命题 $p:\forall\ x,y\in\mathbf{R}$, 如果$xy=0$, 则$x=0$ 或$y=0$. 下列判断正确的个数是（　　）

①命题 p 的逆命题是：$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$, 如果$x=0$ 或$y=0$, 则$xy=0$；

②命题 p 的否命题是：$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$, 如果$xy\neq 0$, 则$x\neq 0$ 且$y\neq 0$；

③命题 p 的逆否命题是：$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$, 如果$x\neq 0$ 且$y\neq 0$, 则$xy\neq 0$.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（3）若 p: $\begin{cases}x>2\\y>1\end{cases}$, q: $\begin{cases}x+y>3\\x\cdot y>2\end{cases}$；则 p 是q 的（　　）

（A）充分非必要条件　　（B）必要非充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分又不必要条件

（4）设a,b 是非零实数，若$a<b$，则下列不等式成立的是（　　）

（A）$a^2<b^2$　　（B）$ab^2<a^2b$　　（C）$\dfrac{1}{ab^2}<\dfrac{1}{a^2b}$　　（D）$\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$

（5）如果正数a,b,c,d 满足$a+b=cd=4$，那么（　　）

（A）$ab\leq c+d$，且等号成立时a,b,c,d 的取值唯一

（B）$ab\geq c+d$，且等号成立时a,b,c,d 的取值唯一

（C）$ab\leq c+d$，且等号成立时a,b,c,d 的取值不唯一

（D）$ab \geq c+d$，且等号成立时a,b,c,d的取值不唯一

（6）已知点F_1，F_2是椭圆C：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$的两个焦点，直线$l$经过点$F_1$且与椭圆$C$相交于点$A$，$B$．则△$ABF_2$的周长等于（　　）

（A）14　（B）16　（C）18　（D）20

（7）数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n满足$S_n=3^n+1$，数列$\{a_n\}$（　　）

（A）是等差数列　（B）既是等差数列又是等比数列

（C）是等比数列　（D）既不是等差数列又不是等比数列

（8）在数列$\{a_n\}$中，若$a_n=129-4n^2$，此数列的前n项和为S_n，则数列$\{S_n\}$的最大项是（　　）

（A）S_7　（B）S_5　（C）S_{17}　（DS_{15}

（9）数列$1,\dfrac{1}{1+2},\dfrac{1}{1+2+3},\cdots,\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$的前2014项的和是（　　）

（A）$\dfrac{4027}{2014}$　（B）$\dfrac{4028}{2015}$　（C）$\dfrac{4023}{2012}$　（D）$\dfrac{4024}{2013}$

（10）某人向银行贷款A万元用于购房．已知年利率为r，利息要按复利计算(即本年的利息计入次年的本金生息)．如果贷款在今年11月7日完成，则从明年开始，每年的11月6日向银行等额还款a万元，n年还清贷款(及利息)．则$a=$（　　）

（A）$a=\dfrac{r\cdot(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\cdot A$　（B）$a=\dfrac{r\cdot(1+r)^{n+1}}{(1+r)^{n+1}-1}\cdot A$

（C）$a=\dfrac{r\cdot(1+r)^{n+1}}{(1+r)^n-1}\cdot A$　（D）$a=\dfrac{r\cdot(1+r)^n}{(1+r)^{n+1}-1}\cdot A$

（11）设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n+\dfrac{\lambda}{n}$，若数列$\{a_n\}$为单调递增数列，则实数λ的取值范围为（　　）

（A）$(-\infty,1)$　（B）$(-\infty,2)$　（C）$(-\infty,\dfrac{9}{4})$　（D）$(-\infty,\dfrac{9}{4}]$

（12）设$\{a_n\}$是集合$\{2^r+2^t+2^s \mid 0 \leq s<t<r$ 且 $s,t,r \in \mathbf{N}\}$中所有的数从小到大排列成的数列, 即$a_1=7$，$a_2=11$，$a_3=13$，$a_4=14$，$a_5=19$，$a_6=21$，……. 若$a_k=146$，则$k=$（　　）

（A）43　　　　（B）44　　　　（C）64　　　　（D）65

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

（13）若$\begin{cases}-4<x<2\\-2<y<3\end{cases}$，则$xy$的取值范围是______________.

（14）$P=\{x\mid x=3n+1,n\in\mathbf{N}\}$，$Q=\{x\mid x=5n+2,n\in\mathbf{N}\}$，则$P\bigcap Q=$___________.

（15）实数a,b,c成等差数列，c,a,b成等比数列，则$a:b:c=$____________.

（16）设点A是椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（其中$a>b>0$）的右顶点. 若椭圆$C$上存在点$P$，使得$\angle OPA=90^\circ$成立，则椭圆$C$离心率的取值范围是____________.

三．解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分 10 分）

（Ⅰ）已知x，y满足：$\begin{cases}x+3y-4\le 0,\\3x+y+4\ge 0,\\x-y\le 0.\end{cases}$若$z=7x+y$，求$z$的最大值和最小值；

（Ⅱ）已知x，y满足：$\begin{cases}x+3y-4\le 0,\\3x+y+4\ge 0,\\x-y\ge 0.\end{cases}$若$z=7x+y$，指出$z$的取值范围.**(本问只需写明结论即可，不必书写证明、求解过程)**

（18）（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=7$，$a_2+a_4=16$．数列$\{b_n\}$满足$a_n=\log_2 b_n$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（Ⅰ）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$c_n=a_nb_n$，S_n为数列$\{c_n\}$的前n项和. 求S_n.

（19）（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$．当$n\in\mathbf{N}^*$时，$na_{n+1}=S_n+n(n+1)$恒成立.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=\dfrac{S_n}{2^n}$，如果对一切正整数n都有$b_n\le t$，求t的最小值.

（20）（本小题满分 12 分）

已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（其中$a>b>0$）的离心率$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且经过点$(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程;

（Ⅱ）设点P是椭圆C上动点, 求点P到定点$M(m,0)$（其中$m\in\mathbf{R}$）距离的最小值，并指出取得该最小值时点P的横坐标.

（21）（本小题满分 12 分）

已知点$A(-a,0)$和$A'(a,0)$是x轴上两定点，点P满足$k_{AP}\cdot k_{A'P}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，其中$a>b>0$. 设曲线$C$是点$P$的轨迹.

（Ⅰ）求曲线C的方程;

（Ⅱ）设点M是曲线C上一动点, 直线AM, $A'M$分别交y轴于点M_1和M_2. 求证：$|OM_1|\cdot|OM_2|$为定值;

（Ⅲ）设B,B'是曲线C与y轴的交点, 点N是曲线C上异于B,B'的一动点, 直线$BN,B'N$分别交x轴于点N_1和N_2, 则$|ON_1|\cdot|ON_2|$为定值. 请写出这个值. **(本问只需写明结论即可, 不必书写证明、求解过程)**

（22）（本小题满分 12 分）

定期定额投资，是一种投资方法，就是每隔一段固定时间(一个月或两个月)以固定的金额投资于同一投资产品. 对于大多数没有时间研究经济景气变化的投资人而言，定期定额投资策略可以说是相当省时省力的投资方法，并且还可以避免不小心买在高点的风险. 因此“定期定额投资”常被称为“懒人理财术”、“傻瓜理财术”.

下面我们以数学的方式来研究“定期定额投资”.

某投资产品J的单价是不断的上下波动变化的，记其在 2014 年 7 月 1 日的单价为t_1元/单位，在 2014 年 8 月 1 日的单价为t_2元/单位，在 2014 年 9 月 1 日的单价为t_3元/单位，在 2014 年 10 月 1 日的单价为t_4元/单位，在 2014 年 11 月 1 日的单价为t_5元/单位.

我们来对比以下两种购买方式:

(a)在上述五个日期中，每次都购买N个单位的投资产品J；

(b)在上述五个日期中，每次都购买M元的投资产品J(即定期定额投资策略)；

设两种购买方式所购投资产品J的平均单价分别为T_a和T_b, 显然:

$$\text{平均单价}=\frac{\text{投资总额}}{\text{所购产品的总单位数}}.$$

（Ⅰ）用t_1、t_2、t_3、t_4、t_5，表示T_a和T_b；

（Ⅱ）证明：$T_a \geq T_b$，并指出$T_a = T_b$的条件.（即**定期定额投资平均单价较低**）