

2011-2012 学年度下学期期末考试高二年级文科数学试卷

参考答案

1-5 CCABB

6-10 BCDBD

11-12 AD

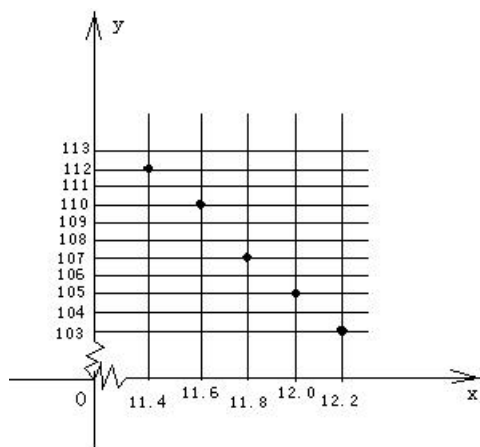
13 $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$

14 $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, 1)$

15 $\frac{1}{e}$

16 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

17 解: (I)



.....3 分

(II) 对数据预处理如下

则 $\overline{x_1} = 0$, $\overline{y_1} = 0.4$

$x_1 = x - 11.8$	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4
$y_1 = y - 107$	5	3	0	-2	-4

$$\therefore \hat{b} = \frac{(-0.4 \times 5) + (-0.2 \times 3) + 0 \times 0 + 0.2 \times (-2) + 0.4 \times (-4) - 5 \times 0 \times 0.4}{(-0.4)^2 + (-0.2)^2 + 0^2 + 0.2^2 + 0.4^2 - 5 \times 0^2} = -11.5$$

所以 $\hat{a} = \overline{y_1} - \hat{b} \cdot \overline{x_1} = 0.4 - (-11.5) \times 0 = 0.4$

$\therefore y_1$ 对 x_1 的回归的直线方程为 $y_1 = -11.5x_1 + 0.4$

$\therefore y - 107 = -11.5(x - 11.8) + 0.4$

即得 y 对 x 的回归的直线方程为

$y = -11.5x + 243.1$ 9 分

(III) 当 $x = 11.9$ 时, $y = 106.25$

即当价格定为11.9元时，预测销售量大约是
106.25kg.12分

18 解：（I）直方图中，因为身高在 170 ~175cm 的男生的频率为 $0.08 \times 5 = 0.4$ ，

设男生数为 n_1 ，则 $0.4 = \frac{16}{n_1}$ ，得 $n_1 = 40$4分

由男生的人数为 40，得女生的人数为 $80 - 40 = 40$.

（II）男生身高 $\geq 170\text{cm}$ 的人数 = $(0.08 + 0.04 + 0.02 + 0.01) \times 5 \times 40 = 30$ ，女生
身高 $\geq 170\text{cm}$ 的人数 $0.02 \times 5 \times 40 = 4$ ，所以可得到下列列联表：

	$\geq 170\text{cm}$	$< 170\text{cm}$	总计
男生身高	30	10	40
女生身高	4	36	40
总计	34	46	80

.....6分

$$\chi^2 = \frac{80(30 \times 36 - 10 \times 4)^2}{40 \times 40 \times 34 \times 46} \approx 34.57 > 6.635, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

所以能有 99.9% 的把握认为身高与性别有关；8分

（III）在 170~175cm 之间的男生有 16 人，女生人数有 4 人.

按分层抽样的方法抽出 5 人，则男生占 4 人，女生占 1 人.9分

设男生为 A_1, A_2, A_3, A_4 ，女生为 B .

从 5 人任选 3 名有：

$(A_1, A_2, A_3), (A_1, A_2, A_4), (A_1, A_2, B), (A_1, A_3, A_4), (A_1, A_3, B), (A_1, A_4, B),$

$(A_2, A_3, A_4), (A_2, A_3, B), (A_2, A_4, B), (A_3, A_4, B)$, 共 10 种可能，10分

3 人中恰好有一名女生有：

$(A_1, A_2, B), (A_1, A_3, B), (A_1, A_4, B), (A_2, A_3, B), (A_2, A_4, B), (A_3, A_4, B),$

共 6 种可能，11分

故所求概率为 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$12分

19 解：

$$(I) f(-x) = -f(x) \quad \therefore \frac{-ax+b}{1+x^2} = \frac{ax+b}{1+x^2} \text{ 得 } b=0$$

$$\text{又 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}, \text{ 代入函数得 } a=1$$

$$\therefore f(x) = \frac{x}{1+x^2}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 在 $(-1,1)$ 上任取两个值 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$.

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

$$\because -1 < x_1 < x_2 < 1 \quad \therefore -1 < x_1x_2 < 1. \therefore 1-x_1x_2 > 0$$

$$\text{又 } x_1 - x_2 < 0, 1+x_1^2 > 0, 1+x_2^2 > 0$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \therefore f(x_1) < f(x_2)$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (-1,1) \text{ 上是增函数}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(III) 由已知得 $f(x-1) < -f(x) = f(-x)$

$$\therefore \begin{cases} -1 < x-1 < 1 \\ -1 < x < 1 \\ x-1 < -x \end{cases} \quad \therefore 0 < x < \frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20 证明: 反证法

若 $(b-1)^2 > 4ac$, 则方程 $at^2 + (b-1)t + c = 0$ 有两不同实根设为 α, β , 则 $(x, y) = (\alpha, \alpha)$ 与 $(x, y) = (\beta, \beta)$ 都为原方程组的实数解。与恰有唯一一组实数解答矛盾。 -----6 分

若 $(b-1)^2 < 4ac$, 此时我们来证明原方程组无实数解, 不妨设 $a > 0$, 故对于任意实数 x, y 都有 $ax^2 + bx + c > x, ay^2 + by + c > y$, 从而有

$$ax^2 + bx + c + ay^2 + by + c > x + y, \text{ 故不存在实数对 } (x, y) \text{ 使原方程组成立.}$$

综上, 我们有 $(b-1)^2 = 4ac$. \dots\dots\dots 12

$$21 \text{ 解: (1) 当 } a = -2 \text{ 时, } f(x) = x^2 - 2 \ln x, \text{ 当 } x \in (1, +\infty), f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x} > 0,$$

故函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}

$$(2) f'(x) = \frac{2x^2 + a}{x} (x > 0), \text{ 当 } x \in [1, e], 2x^2 + a \in [a+2, a+2e^2].$$

若 $a \geq -2$, $f'(x)$ 在 $[1, e]$ 上非负 (仅当 $a = -2$, $x = 1$ 时, $f'(x) = 0$), 故函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上是增函数, 此时 $[f(x)]_{\min} = f(1) = 1$.

若 $-2e^2 < a < -2$, 当 $x = \sqrt{\frac{-a}{2}}$ 时, $f'(x) = 0$; 当 $1 \leq x < \sqrt{\frac{-a}{2}}$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$

是减函数; 当 $\sqrt{\frac{-a}{2}} < x \leq e$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 是增函数. 故 $[f(x)]_{\min} = f(\sqrt{\frac{-a}{2}})$

$$= \frac{a}{2} \ln\left(-\frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

若 $a \leq -2e^2$, $f'(x)$ 在 $[1, e]$ 上非正 (仅当 $a = -2e^2$, $x = e$ 时, $f'(x) = 0$), 故函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上是减函数, 此时 $[f(x)]_{\min} = f(e) = a + e^2$.

综上可知, 当 $a \geq -2$ 时, $f(x)$ 的最小值为 1, 相应的 x 值为 1; 当 $-2e^2 < a < -2$ 时, $f(x)$

的最小值为 $\frac{a}{2} \ln\left(-\frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2}$, 相应的 x 值为 $\sqrt{\frac{-a}{2}}$; 当 $a \leq -2e^2$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $a + e^2$,

相应的 x 值为 e . $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3) 不等式 $f(x) \leq (a+2)x$, 可化为 $a(x - \ln x) \geq x^2 - 2x$.

$\because x \in [1, e]$, $\therefore \ln x \leq 1 \leq x$ 且等号不能同时取, 所以 $\ln x < x$, 即 $x - \ln x > 0$,

因而 $a \geq \frac{x^2 - 2x}{x - \ln x}$ ($x \in [1, e]$) $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{令 } g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - \ln x} \quad (x \in [1, e]), \text{ 又 } g'(x) = \frac{(x-1)(x+2-2\ln x)}{(x-\ln x)^2},$$

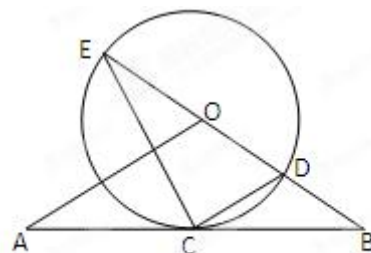
当 $x \in [1, e]$ 时, $x - 1 \geq 0, \ln x \leq 1, x + 2 - 2\ln x > 0$,

从而 $g'(x) \geq 0$ (仅当 $x = 1$ 时取等号), 所以 $g(x)$ 在 $[1, e]$ 上为增函数,

故 $g(x)$ 的最小值为 $g(1) = -1$, 所以 a 的取值范围是

$[-1, +\infty)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22、解 (I) 如图, 连接 OC ,



因为 $OA = OB, CA = CB$, 所以 $OC \perp AB$.

因为 OC 是圆的半径,

所以 AB 是圆的切线.3 分

(II) 因为 ED 是直径,

所以 $\angle ECD = 90^\circ$, 所以 $\angle E + \angle EDC = 90^\circ$,

又 $\angle BCD + \angle OCD = 90^\circ, \angle OCD = \angle ODC$,

所以 $\angle BCD = \angle E$, 又因为 $\angle CBD = \angle EBC$,

所以 $\triangle BCD \sim \triangle BEC$,

所以 $\frac{BC}{BE} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BC^2 = BD \cdot BE$,5 分

$\tan \angle CED = \frac{CD}{EC} = \frac{1}{2}$, $\triangle BCD \sim \triangle BEC$,

$\frac{BD}{BC} = \frac{CD}{EC} = \frac{1}{2}$7 分

设 $BD = x$, 则 $BC = 2x$, 因为 $BC^2 = BD \cdot BE$,

所以 $(2x)^2 = x(x+6)$, 所以 $BD = 2$9 分

所以 $OA = OB = BD + OD = 2 + 3 = 5$10 分

23、解: (I) 曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 - 4x + y^2 = 0$

将 $\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ 代入上式并整理的 $t^2 - 4\sqrt{3}t + 12 = 0$ 2 分

解得 $t = 2\sqrt{3}$ $\therefore$ 点 T 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$

其极坐标为 $(2, \frac{\pi}{3})$ 4 分

(II) 由已知可得直线 l_1 与 x 轴不垂直, 设 l_1 的方程为 $y - \sqrt{3} = k(x - 1)$,6 分

即 $kx - y + \sqrt{3} - k = 0$

由 (I) 得曲线 C 是以 $(2, 0)$ 为圆心, 2 为半径的圆,

$\therefore$ 直线 l_1 被曲线 C 截得的线段长为 2, $\therefore$ 圆心到直线 l_1 的距离为 $\sqrt{3}$

$$\therefore \frac{|\sqrt{3}+k|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{3}, \text{ 解得 } k=0 \text{ 或 } k=\sqrt{3}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\therefore$ 直线 l_1 的直角坐标方程为 $y = \sqrt{3}$ 或 $y = \sqrt{3}x$

$$\text{其极坐标方程为 } \rho \cdot \sin \theta = \sqrt{3} \text{ 或 } \theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in R) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

24 解: (I) $\because |2x-a|+2a \leq 6, \therefore |2x-a| \leq 6-2a, \therefore 2a-6 \leq 2x-a \leq 6-2a$

$$\therefore \frac{3}{2}a-3 \leq x \leq 3-\frac{1}{2}a \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

又 $\because$ 不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集为 $\{x | -6 \leq x \leq 4\}$

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{3}{2}a-3 = -6 \\ 3-\frac{1}{2}a = 4 \end{cases} \quad \text{解得 } a = -2 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 由 (I) 得 $f(x) = |2x+2|-4$, 由不等式 $f(x) \leq (k^2-1)x-5$ 得

$$|2x+2|-4 \leq (k^2-1)x-5$$

$$\text{化简得 } |2x+2|+1 \leq (k^2-1)x \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g(x) = |2x+2|+1 = \begin{cases} 2x+3, & x \geq -1, \\ -2x-1, & x < -1, \end{cases} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$y = g(x)$ 的图象如图所示

要使不等式 $f(x) \leq (k^2-1)x-5$ 的解集非空

$$\text{只需 } k^2-1 > 2 \text{ 或 } k^2-1 \leq -1$$

$\therefore$ 实数 k 的取值范围是 $\{k | k < -\sqrt{3} \text{ 或 } k > \sqrt{3} \text{ 或 } k = 0\} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

