

2017-2018 学年高三（上）第二次月考数学试卷

一、选择题

1. (3分) 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x+y \geq -1 \\ y \leq 0 \end{cases}$, 则 $z=x-y$ 的取值范围是 ()

A. $[-\sqrt{2}, 1]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ D. $[-1, \sqrt{2}]$

2. (3分) 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)$, 当 $x \in [3, 5]$ 时, $f(x)=2-|x-4|$, 则下列不等式一定不成立的是 ()

A. $f(\cos \frac{\pi}{6}) > f(\sin \frac{\pi}{6})$ B. $f(\sin 1) < f(\cos 1)$

C. $f(\cos \frac{2\pi}{3}) > f(\sin \frac{2\pi}{3})$ D. $f(\sin 2) < f(\cos 2)$

3. (3分) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \sin(2x - \frac{\pi}{6}), & -\pi \leq x < m \\ \cos(2x - \frac{\pi}{6}), & m \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 恰有 4 个零点, 则 m 的取值范围为 ()

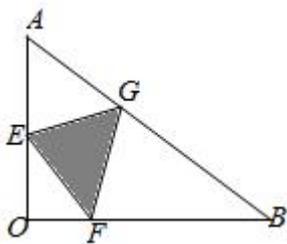
A. $[-\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}] \cup (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}]$

B. $(-\frac{11\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3}] \cup (-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}] \cup (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}]$

C. $[-\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}) \cup [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3})$

D. $[-\frac{11\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3}) \cup [-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}) \cup [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3})$

4. (3分) 如图, 在 $\triangle AOB$ 中, $\angle AOB=90^\circ$, $OA=1$, $OB=\sqrt{3}$, 等边 $\triangle EFG$ 三个顶点分别在 $\triangle AOB$ 的三边上运动, 则 $\triangle EFG$ 面积的最小值为 ()



A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{25}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{28}$

5. (3分) 函数 $f(x) = \begin{cases} -8\sin 2x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}f(x-\frac{\pi}{2}), & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $h(x) = f(x) - \log_4 x$ 的零

点个数为 ()

A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

6. (3分) 已知坐标平面上的凸四边形 ABCD 满足 $\overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3}, 1)$,

那么 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的取值范围是 ()

A. $(-1, \sqrt{3})$ B. $(-1, 2]$ C. $[-2, 0)$ D. $[0, 2]$

7. (3分) 以方程 $x^2 + px + 1 = 0$ 的两根为三角形两边之长, 第三边长为 2, 则实数 p 的取值范围是 ()

A. $p < -2$ B. $p \leq -2$ 或 $p \geq 2$ C. $-2\sqrt{2} < p < 2\sqrt{2}$ D. $-2\sqrt{2} < p < -2$

8. (3分) $y = \sqrt{2ax^2 + 4x + a - 1}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ C. $[-1, 2]$ D. $[0, 2]$

9. (3分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ 1 - x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 则方程 $f(2x^2 + x) = a$ ($a > 0$) 的根的

个数不可能为 ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

10. (3分) 设 A, B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k} = 1$ 长轴的两个端点, 若 C 上存在点 P 满

足 $\angle APB = 120^\circ$, 则 k 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{4}{3}] \cup [12, +\infty)$ B. $(0, \frac{2}{3}] \cup [6, +\infty)$ C. $(0, \frac{2}{3}] \cup [12, +\infty)$

D. $(0, \frac{4}{3}] \cup [6, +\infty)$

11. (3分) 已知函数 $f(x) = (2x - 1)e^x + ax^2 - 3a$ ($x > 0$) 为增函数, 则 a 的取值范围是 ()

A. $[-2\sqrt{e}, +\infty)$ B. $[-\frac{3}{2}e, +\infty)$ C. $(-\infty, -2\sqrt{e}]$ D. $(-\infty, -\frac{3}{2e}]$

12. (3分) 定义 $\frac{n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$ 为 n 个正数 p_1, p_2, \dots, p_n 的“均倒数”. 若已知

正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的“均倒数”为 $\frac{1}{2n+1}$, 又 $b_n = \frac{a_n + 1}{4}$, 则

$$\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \frac{1}{b_3 b_4} + \dots + \frac{1}{b_{2015} b_{2016}} = (\quad)$$

A. $\frac{2013}{2014}$ B. $\frac{2014}{2015}$ C. $\frac{2015}{2016}$ D. $\frac{1}{2015}$

二、填空题

13. (3分) 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 对于 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x+4) = f(x) + f(2)$ 成立, 当 $x_1, x_2 \in [0, 2]$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 给

出下列四个命题:

① $f(-2) = 0$;

② 直线 $x = -4$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴;

③ 函数 $y=f(x)$ 在 $[4, 6]$ 上为减函数;

④ 函数 $y=f(x)$ 在 $(-8, 6]$ 上有四个零点.

其中所有正确命题的序号为_____.

14. (3分) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 10, 则 b 的值为_____.

15. (3分) 若函数 $y=f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 满足 $f(x+2) = f(x)$ 且 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = 1 - x^2$; 函数 $g(x) = \lg|x|$, 则 $F(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [-5, 5]$ 的零点有_____个.

16. (3分) 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 焦点为 F , 直线 MN 过焦点 F 且与抛物线 C 交于 M, N 两点, P 为抛物线 C 准线 l 上一点且 $PF \perp MN$, 连接 PM 交 y 轴于 Q 点, 过 Q 作 $QD \perp MF$ 于点 D , 若 $|MD| = 2|FN|$, 则 $|MF| =$ _____.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线 l 垂直于直线 $y=x$, 求实数 a 的值及直线 l 的方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若 $x > 1$, 求证: $\ln x < x - 1$.

18. 在直角坐标系 xOy 中, 已知定圆 $M: (x+1)^2 + y^2 = 36$, 动圆 N 过点 $F(1, 0)$ 且与圆 M 相切, 记动圆圆心 N 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 设 A, P 是曲线 C 上两点, 点 A 关于 x 轴的对称点为 B (异于点 P), 若直线 AP, BP 分别交 x 轴于点 S, T, 证明: $|OS| \cdot |OT|$ 为定值.

19. 已知圆 C: $(x+1)^2 + y^2 = 8$, 定点 A (1, 0), M 为圆上一动点, 线段 m 的垂直平分线交线段 MC 于点 N, 设点 N 的轨迹为曲线 E.

(I) 求曲线 E 的方程;

(II) 若经过 F (0, 2) 的直线 L 交曲线 E 于不同的两点 G, H (点 G 点 F, H 之间), 且满足 $\overrightarrow{FG} = \frac{3}{5} \overrightarrow{FH}$, 求直线 L 的方程.

20. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{1}{2}$, $g(x) = m \cos(x + \frac{\pi}{3}) - m + 2$

(1) 若对任意的 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, 均有 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 求 m 的取值范围;

(2) 若对任意的 $x \in [0, \pi]$, 均有 $f(x) \geq g(x)$, 求 m 的取值范围.

2017-2018 学年河北省保定市定州中学承智班高三（上）

第二次月考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题

1. (3分) 已知 x, y 满足 $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x+y \geq -1 \\ y \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z=x-y$ 的取值范围是 ()

A. $[-\sqrt{2}, 1]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ D. $[-1, \sqrt{2}]$

【分析】 作出不等式组对应的平面区域，利用 z 的几何意义，利用数形结合即可得到结论.

【解答】 解：作出不等式组 $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x+y \geq -1 \\ y \leq 0 \end{cases}$ ，对应的平面区域如图，

由 $z=x-y$ ，得 $y=x-z$ ，

当直线 $y=x-z$ 经过点 $A(-1, 0)$ 时，直线 $y=x-z$ 的截距最大，此时 z 最小为 $z=-1$.

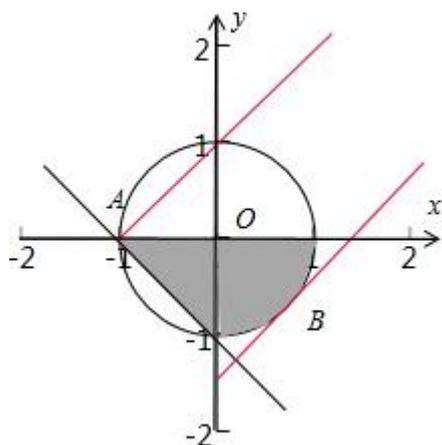
当直线 $y=x-z$ 与圆在第四象限相切时，直线 $y=x-z$ 的截距最大，此时 z 最小，

由 $d = \frac{|z|}{\sqrt{2}} = 1$ ，

解得 $z = \sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$ (舍)，

故 $-1 \leq z \leq \sqrt{2}$ ，

故选：D.



【点评】 本题主要考查线性规划的应用，利用数形结合是解决本题的关键，要求熟练掌握直线和圆的位置关系的应用.

2. (3分) 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x)$, 当 $x \in [3, 5]$ 时, $f(x) = 2 - |x - 4|$, 则下列不等式一定不成立的是 ()

- A. $f(\cos \frac{\pi}{6}) > f(\sin \frac{\pi}{6})$ B. $f(\sin 1) < f(\cos 1)$
 C. $f(\cos \frac{2\pi}{3}) > f(\sin \frac{2\pi}{3})$ D. $f(\sin 2) < f(\cos 2)$

【分析】 根据周期得出 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的单调性与奇偶性, 再利用三角函数的性质判断各选项.

【解答】 解: $\because f(x+2) = f(x)$, $\therefore f(x)$ 的周期为 2,

$$\therefore \text{当 } x \in [-1, 1] \text{ 时, } f(x) = 2 - |x| = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2+x, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$\therefore f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是偶函数, 且在 $[-1, 0]$ 上单调递增, 在 $[0, 1]$ 上单调递减,

$\because 1 > \cos \frac{\pi}{6} > \sin \frac{\pi}{6} > 0$, $\therefore f(\cos \frac{\pi}{6}) < f(\sin \frac{\pi}{6})$, 故 A 错误;

$\because \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$, $\therefore 1 > \sin 1 > \cos 1 > 0$, $\therefore f(\sin 1) < f(\cos 1)$, 故 B 正确;

$\because \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore f(\cos \frac{2\pi}{3}) > f(\sin \frac{2\pi}{3})$, 故 C 正确;

$\because \frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3\pi}{4}$, $\therefore 1 > \sin 2 > |\cos 2| > 0$, $\therefore f(\sin 2) < f(\cos 2)$, 故 D 正确.

故选 A.

【点评】 本题考查了函数周期性的应用, 三角函数的性质, 属于中档题.

3. (3分) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \sin(2x - \frac{\pi}{6}), & -\pi \leq x < m \\ \cos(2x - \frac{\pi}{6}), & m \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 恰有 4 个零点, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $[-\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}] \cup (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}]$
 B. $(-\frac{11\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3}] \cup (-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}] \cup (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}]$
 C. $[-\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}) \cup [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3})$
 D. $[-\frac{11\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3}) \cup [-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}) \cup [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3})$

【分析】 设 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$, $h(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$, 作出这两个函数在 $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ 上的图象, 求出零点, 通过图象即可得到所求 m 的范围.

【解答】 解: 设 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$, $h(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$, 作出这两个函数在 $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ 上的图象, 如图所示:

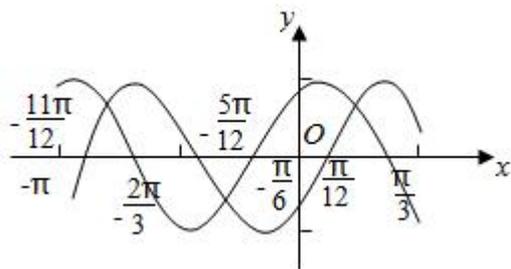
$g(x)$ 在 $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ 上的零点为 $-\frac{11\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$;

$h(x)$ 在 $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ 上的零点为 $-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$.

$f(x)$ 恰有 4 个零点,

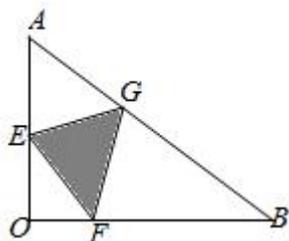
由图象可得 $m \in (-\frac{11\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3}] \cup (-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{6}] \cup (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}]$.

故选: B.



【点评】 本题考查函数的零点个数问题解法, 注意运用转化思想和数形结合思想方法, 考查观察和判断能力, 属于中档题.

4. (3分) 如图, 在 $\triangle AOB$ 中, $\angle AOB=90^\circ$, $OA=1$, $OB=\sqrt{3}$, 等边 $\triangle EFG$ 三个顶点分别在 $\triangle AOB$ 的三边上运动, 则 $\triangle EFG$ 面积的最小值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{25}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{28}$

【分析】 设等边三角形的边长为 t , 结合几何关系得到面积函数, 结合三角函数的性质即可求得面积的最小值.

【解答】 解: 设 $\triangle EFG$ 的边长为 t , $\angle OEF=\theta$, 则 $\angle AGE=\theta$, $\angle EAO=60^\circ$,

$$OE=t\cos\theta, \frac{t}{\sin 60^\circ} = \frac{AE}{\sin\theta}, \therefore AE = \frac{2t\sin\theta}{\sqrt{3}},$$

$$\text{所以 } OE+AE=t\cos\theta + \frac{2t\sin\theta}{\sqrt{3}}=1,$$

$$\text{且: } S_{\triangle EFG} = \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\theta + 2\sin\theta} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{7\sin^2(\theta+\phi)},$$

$$\text{其中 } \sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \cos\phi = \frac{2}{\sqrt{7}},$$

$$\text{当 } \sin(\theta+\phi)=1 \text{ 时, } \triangle EFG \text{ 取得面积的最小值 } \frac{3\sqrt{3}}{28}.$$

故选: D.

【点评】 本题考查了三角形中的几何关系, 三角函数的性质及其应用等, 重点考查学生对基础概念的理解和计算能力, 属于中等题.

5. (3分) 函数 $f(x) = \begin{cases} -8\sin 2x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}f(x-\frac{\pi}{2}), & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $h(x) = f(x) - \log_4 x$ 的零点个数为 ()

点个数为 ()

- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

【分析】 函数 $h(x) = f(x) - \log_4 x$ 的零点个数 \Leftrightarrow 函数 $f(x)$ 与函数 $y = \log_4 x$ 的图象交点个数.

画出函数 $f(x)$ 与函数 $y = \log_4 x$ 的图象 (如图), 根据图象可得答案.

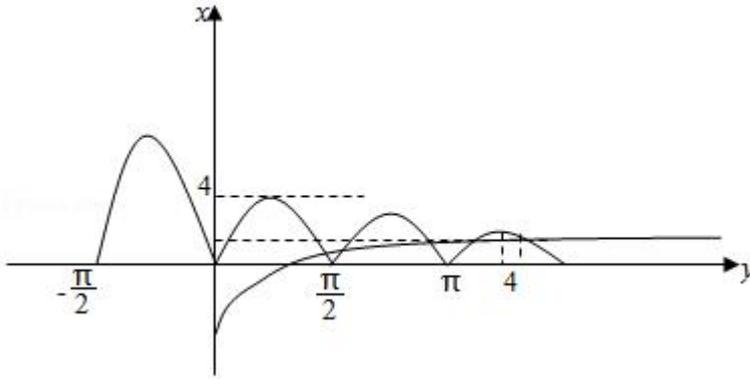
【解答】解：函数 $h(x) = f(x) - \log_4 x$ 的零点个数 \Leftrightarrow 函数 $f(x)$ 与函数 $y = \log_4 x$ 的图象交点个数.

画出函数 $f(x)$ 与函数 $y = \log_4 x$ 的图象 (如图),

根据图象可得函数 $f(x)$ 与函数 $y = \log_4 x$ 的图象交点为 5 个.

\therefore 函数 $h(x) = f(x) - \log_4 x$ 的零点个数为 5 个.

故选: D



【点评】本题主要考查函数零点的个数的判断, 根据方程和函数之间的关系, 转化为两个函数图象的交点问题是解决本题的关键, 利用数形结合是解决本题的基本思想.

6. (3 分) 已知坐标平面上的凸四边形 $ABCD$ 满足 $\overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3}, 1)$,

那么 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ 的取值范围是 ()

- A. $(-1, \sqrt{3})$ B. $(-1, 2]$ C. $[-2, 0)$ D. $[0, 2]$

【分析】根据向量的模的计算和向量的坐标运算得到四边形 $ABCD$ 为对角线垂直且相等的四边形, 问题得以解决.

【解答】解: $\because \overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3}, 1)$,

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times 1 = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD},$$

$$\therefore \text{凸四边形 } ABCD \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2,$$

设 AC 与 BD 交点为 O , $OC = x$, $OD = y$, 则 $AO = 2 - x$, $BO = 2 - y$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -x(x - 2)$$

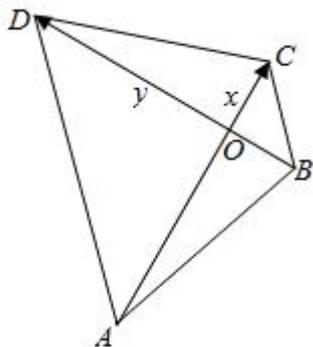
$$+y(y-2) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 2, (0 < x, y < 2);$$

∴ 当 $x=y=1$ 时, $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -2$ 为最小值,

当 $x \rightarrow 0$ 或 1 , $y \rightarrow 0$ 或 1 时, $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ 接近最大值 0 ,

∴ $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ 的取值范围是 $[-2, 0)$.

故选: C.



【点评】 本题考查了向量的坐标运算和向量的模的计算以及向量的夹角公式, 属于中档题.

7. (3分) 以方程 $x^2+px+1=0$ 的两根为三角形两边之长, 第三边长为 2 , 则实数 p 的取值范围是 ()

A. $p < -2$ B. $p \leq -2$ 或 $p \geq 2$ C. $-2\sqrt{2} < p < 2\sqrt{2}$ D. $-2\sqrt{2} < p < -2$

【分析】 先根据方程有两个实数根求出 p 的取值范围, 再根据韦达定理求出 x_1+x_2 及 x_1x_2 的值, 根据三角形的三边关系即可得出结论.

【解答】 解: ∵ 三角形的两边长是方程 $x^2+px+1=0$ 的两个根,

∴ $\Delta \geq 0$, 即 $\Delta = p^2 - 4 \geq 0$, 解得 $p \geq 2$ 或 $p \leq -2$.

∵ $x_1+x_2 = -p > 2$, $x_1x_2 = 1$, $|x_1 - x_2| < 2$,

故 $p < -2$, $p^2 < 8$,

∴ $-2\sqrt{2} < p < -2$,

故选: D.

【点评】 本题考查的是根的判别式, 熟知一元二次方程的解与判别式 Δ 的关系是解答此题的关键.

8. (3分) $y=\sqrt{2ax^2+4x+a-1}$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ C. $[-1, 2]$ D. $[0, 2]$

【分析】 令 $t=2ax^2+4x+a-1$, 则 $y=\sqrt{t}$, 由函数 y 的值域为 $[0, +\infty)$, 则函数 t 的值域为 $[0, +\infty)$, 然后分类讨论, 当 $a=0$ 时, 函数 t 的值域为 $[0, +\infty)$, 当 $a \neq 0$ 时, 要使函数 $t=2ax^2+4x+a-1$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\begin{cases} 2a > 0 \\ \Delta = 16 - 8a(a-1) \geq 0 \end{cases}$,

求解即可得 a 的取值范围.

【解答】 解: 令 $t=2ax^2+4x+a-1$, 则 $y=\sqrt{t}$,

\because 函数 $y=\sqrt{2ax^2+4x+a-1}$ 的值域为 $[0, +\infty)$,

\therefore 函数 $t=2ax^2+4x+a-1$ 的值域为 $[0, +\infty)$,

当 $a=0$ 时, $t=4x-1$,

由 $4x-1 \geq 0$, 得函数 $t=4x-1$ 的值域为 $[0, +\infty)$,

当 $a \neq 0$ 时, 要使函数 $t=2ax^2+4x+a-1$ 的值域为 $[0, +\infty)$,

则 $\begin{cases} 2a > 0 \\ \Delta = 16 - 8a(a-1) \geq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a > 0 \\ (a-2)(a+1) \leq 0 \end{cases}$,

解得 $0 < a \leq 2$,

$\therefore a$ 的取值范围是 $[0, 2]$.

故选: D.

【点评】 本题考查了复合函数的值域的求法, 通过值域来求参数的问题. 属于中档题.

9. (3分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ 1-x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 则方程 $f(2x^2+x) = a$ ($a > 0$) 的根的

个数不可能为 ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【分析】 作函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ 1-x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象, 结合图象分析根的个数.

【解答】 解: 作函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ 1-x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象如右图,

$\because 2x^2+x=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$;

故当 $a=f\left(-\frac{1}{8}\right)$ 时, 方程 $f(2x^2+x)=a$ 有一个负根 $-\frac{1}{4}$,

再由 $|\lg(2x^2+x)|=f\left(-\frac{1}{8}\right)$ 得,

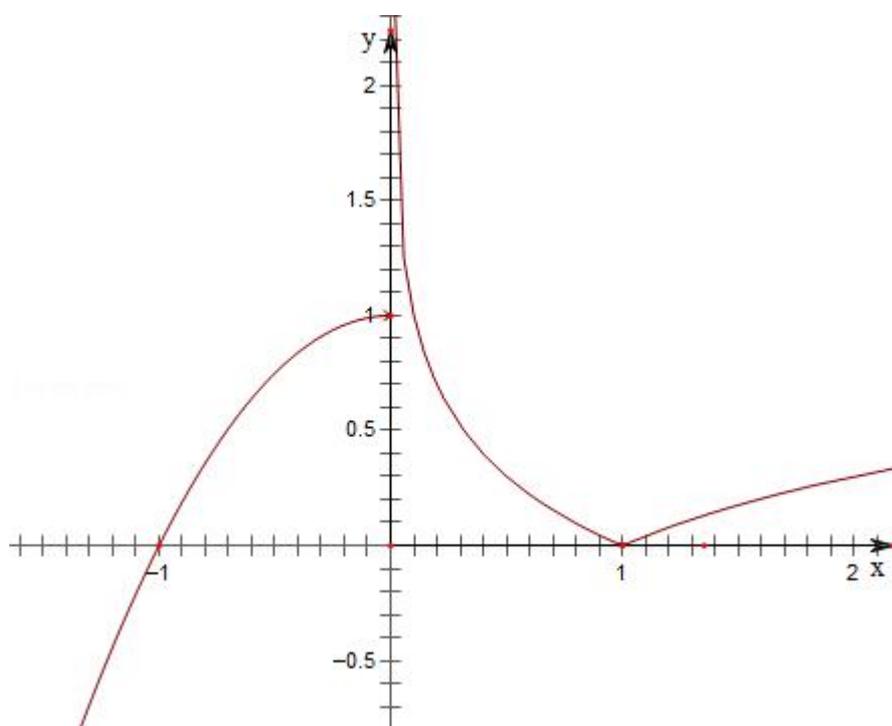
$$2x^2+x=10^{f\left(-\frac{1}{8}\right)}, \text{ 及 } 2x^2+x=10^{-f\left(-\frac{1}{8}\right)},$$

故还有四个解, 故共有 5 个解;

当 $a>1$ 时, 方程 $f(2x^2+x)=a$ 有四个解,

当 $f\left(-\frac{1}{8}\right)<a<1$ 时, 方程 $f(2x^2+x)=a$ 有 6 个解;

故选 A.



【点评】 本题考查了作图能力及分段函数的应用, 属于难题.

10. (3分) 设 A, B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{k} = 1$ 长轴的两个端点, 若 C 上存在点 P 满

足 $\angle APB=120^\circ$, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{4}{3}] \cup [12, +\infty)$ B. $(0, \frac{2}{3}] \cup [6, +\infty)$ C. $(0, \frac{2}{3}] \cup [12, +\infty)$
 D. $(0, \frac{4}{3}] \cup [6, +\infty)$

【分析】: ① $0 < k < 4$ 时, C 上存在点 P 满足 $\angle APB=120^\circ$, 假设 M 位于短轴的端

点时, $\angle AMB$ 取最大值, 要使椭圆 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120^\circ$, $\angle AMB \geq 120^\circ$, $\angle AMO \geq 60^\circ$, $\tan \angle AMO = \frac{2}{\sqrt{k}} \geq \tan 60^\circ$, 解得 k .

②当椭圆的焦点在 y 轴上时, $k > 4$, 同理可得 k 范围.

【解答】解: ① $0 < k < 4$ 时, C 上存在点 P 满足 $\angle APB=120^\circ$,

假设 M 位于短轴的端点时, $\angle AMB$ 取最大值,

要使椭圆 C 上存在点 M 满足

$$\angle AMB=120^\circ,$$

$$\angle AMB \geq 120^\circ, \angle AMO \geq 60^\circ,$$

$$\tan \angle AMO = \frac{2}{\sqrt{k}} \geq \tan 60^\circ,$$

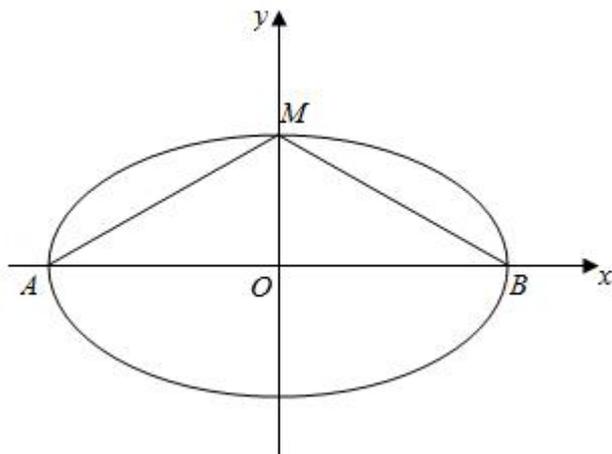
$$\text{解得: } 0 < k \leq \frac{4}{3}.$$

②当椭圆的焦点在 y 轴上时, $k > 4$,

同理可得: $k \geq 12$,

$$\therefore m \text{ 的取值范围是 } (0, \frac{4}{3}] \cup [12, +\infty)$$

故选: A.



【点评】本题考查了椭圆的标准方程及其性质、三角函数的单调性、分类讨论方法, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

11. (3分) 已知函数 $f(x) = (2x - 1)e^x + ax^2 - 3a$ ($x > 0$) 为增函数, 则 a 的取值范围是 ()

A. $[-2\sqrt{e}, +\infty)$ B. $[-\frac{3}{2}e, +\infty)$ C. $(-\infty, -2\sqrt{e}]$ D. $(-\infty, -\frac{3}{2e}]$

【分析】 函数 $f(x) = (2x - 1)e^{x+ax^2} - 3a$ ($x > 0$) 为增函数, 可得 $f'(x) \geq 0$, 化为 $2a \geq -\left(2 + \frac{1}{x}\right)e^x$, 令 $g(x) = -\left(2 + \frac{1}{x}\right)e^x$, 利用导数研究其单调性极值与最值即可得出.

【解答】 解: \because 函数 $f(x) = (2x - 1)e^{x+ax^2} - 3a$ ($x > 0$) 为增函数,

$$\therefore f'(x) = (2x+1)e^{x+2ax} \geq 0, \text{ 化为 } 2a \geq -\left(2 + \frac{1}{x}\right)e^x,$$

$$\text{令 } g(x) = -\left(2 + \frac{1}{x}\right)e^x, \text{ 则 } g'(x) = -\frac{(2x-1)(x+1)e^x}{x^2},$$

可得: $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x)$ 取得极大值即最大值, $g\left(\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{e}$.

$$\therefore a \geq -2\sqrt{e}.$$

$\therefore a$ 的取值范围是 $[-2\sqrt{e}, +\infty)$.

故选: A.

【点评】 本题考查了利用导数研究其单调性极值与最值、等价转化方法, 考查了推理能力与计算能力, 属于中档题.

12. (3分) 定义 $\frac{n}{p_1+p_2+\dots+p_n}$ 为 n 个正数 p_1, p_2, \dots, p_n 的“均倒数”. 若已知

正数数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的“均倒数”为 $\frac{1}{2n+1}$, 又 $b_n = \frac{a_n+1}{4}$, 则

$$\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \frac{1}{b_3 b_4} + \dots + \frac{1}{b_{2015} b_{2016}} = (\quad)$$

A. $\frac{2013}{2014}$ B. $\frac{2014}{2015}$ C. $\frac{2015}{2016}$ D. $\frac{1}{2015}$

【分析】 直接利用给出的定义得到 $\frac{n}{a_1+a_2+\dots+a_n} = \frac{1}{2n+1}$, 整理得到 $S_n = 2n^2 + n$. 分

$n=1$ 和 $n \geq 2$ 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项, 验证 $n=1$ 时满足, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可求; 再利用裂项求和方法即可得出.

【解答】 解: 由已知定义, 得到 $\frac{n}{a_1+a_2+\dots+a_n} = \frac{1}{2n+1}$,

$$\therefore a_1+a_2+\dots+a_n = n(2n+1) = S_n,$$

即 $S_n = 2n^2 + n$.

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 + n) - [2(n-1)^2 + (n-1)] = 4n - 1$.

当 $n=1$ 时也成立,

$$\therefore a_n = 4n - 1;$$

$$\therefore b_n = \frac{a_n + 1}{4} = n,$$

$$\therefore \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\therefore \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \frac{1}{b_3 b_4} + \dots + \frac{1}{b_n b_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

$$\therefore \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \frac{1}{b_3 b_4} + \dots + \frac{1}{b_{2015} b_{2016}} = \frac{2015}{2016},$$

故选: C

【点评】本考查了数列的递推关系式的运用,裂项的方法求解数列的和,考查的解题思想较多,但是运算量不大,属于中档题.

二、填空题

13. (3分) 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 对于 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x+4) = f(x) + f(2)$ 成立, 当 $x_1, x_2 \in [0, 2]$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 给

出下列四个命题:

① $f(-2) = 0$;

② 直线 $x = -4$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴;

③ 函数 $y=f(x)$ 在 $[4, 6]$ 上为减函数;

④ 函数 $y=f(x)$ 在 $(-8, 6]$ 上有四个零点.

其中所有正确命题的序号为 ①②③④.

【分析】① 令 $x = -2$, 可得 $f(-2) = 0$, 从而可判断①正确;

② 由 (1) 知 $f(x+4) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 4,

再利用 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的偶函数, 根据函数对称性从而可判断②正确;

③ 依题意知, 函数 $y=f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上为减函数结合函数的周期性,

从而可判断③正确;

④ 由题意可知, y 作出函数在 $(-8, 6]$ 上有的图象, 从而可判断④正确.

【解答】解: 对于①, 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x+4) = f(x) + f(2)$ 成立,

令 $x = -2$, 则 $f(-2+4) = f(-2) + f(2) = f(2)$,

$\therefore f(-2) = 0$, ①正确;

对于②, 由①知 $f(x+4) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的周期为 4,

又 $\because f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的偶函数, $\therefore f(x+4) = f(-x)$,

而 $f(x)$ 的周期为 4, 则 $f(x+4) = f(-4+x)$, $f(-x) = f(-x-4)$,

$\therefore f(-4-x) = f(-4+x)$,

\therefore 直线 $x = -4$ 是函数 $y = f(x)$ 的图象的一条对称轴, ②正确;

对于③, 当 $x_1, x_2 \in [0, 2]$, 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$,

\therefore 函数 $y = f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上为减函数,

而 $f(x)$ 的周期为 4,

\therefore 函数 $y = f(x)$ 在 $[4, 6]$ 上为减函数, ③正确;

对于④, $\because f(2) = 0$, $f(x)$ 的周期为 4,

函数 $y = f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上为增函数,

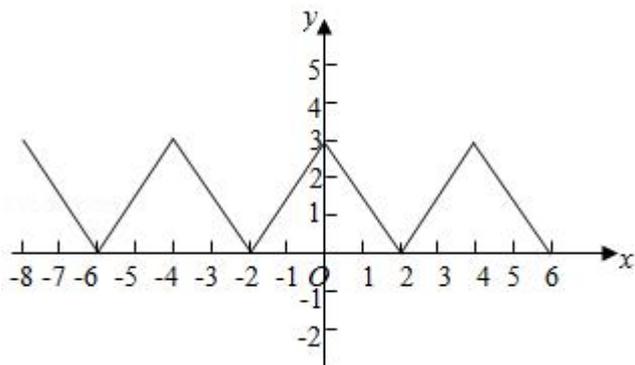
在 $[-2, 0]$ 上为减函数,

作出函数在 $(-8, 6]$ 上的图象如图所示;

\therefore 函数 $y = f(x)$ 在 $(-8, 6]$ 上有 4 个零点, ④正确.

综上, 以上正确的命题是①②③④.

故答案为. ①②③④.



【点评】 本题考查了命题的真假判断问题, 着重考查了函数的奇偶性、周期性、对称性及零点的确定问题, 是综合题.

14. (3分) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值 10, 则 b 的值为 -11.

【分析】先对函数求导 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ，由题意可得 $f(1) = 10$ ， $f'(1) = 0$ ，结合导数存在的条件可求。

【解答】解： $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\text{则} \begin{cases} f'(1) = 3 + 2a + b = 0 \\ f(1) = 1 + a + b + a^2 = 10 \end{cases}$$

当 $\begin{cases} a=4 \\ b=-11 \end{cases}$ 时， $f'(x) = 3x^2 + 8x - 11$ ， $\Delta = 64 + 132 > 0$ ，所以函数有极值点；

当 $\begin{cases} a=-3 \\ b=3 \end{cases}$ ，所以函数无极值点；

则 b 的值为：-11。

故答案为：-11。

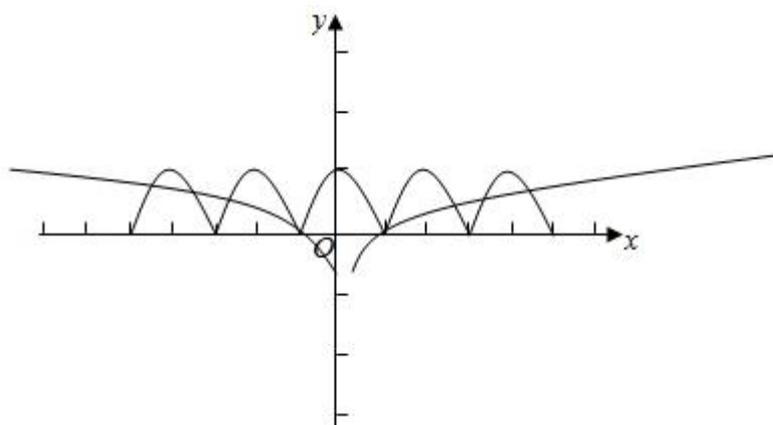
【点评】本题主要考查了利用导数研究函数的极值，注意函数极值存在的充要条件，考查计算能力。

15. (3分) 若函数 $y=f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 满足 $f(x+2) = f(x)$ 且 $x \in [-1, 1]$ 时， $f(x) = 1 - x^2$ ；函数 $g(x) = \lg|x|$ ，则 $F(x) = f(x) - g(x)$ ， $x \in [-5, 5]$ 的零点有 8 个。

【分析】利用周期作出 $f(x)$ 的函数图象，根据 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象交点个数得出 $F(x)$ 的零点个数。

【解答】解：函数 $y=f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 满足 $f(x+2) = f(x)$ ，故函数 $y=f(x)$ 是周期等于 2 的周期函数。

作出 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的函数图象如图所示：



由图象可得 $y=f(x)$ 和 $g(x) = \lg|x|$ 在 $[-5, 5]$ 上有 8 个交点，

$\therefore F(x) = f(x) - g(x)$ 在 $[-5, 5]$ 上有 8 个零点.

故答案为: 8.

【点评】 本题主要考查方程的根的存在性及个数判断, 体现了数形结合的数学思想, 属于中档题.

16. (3分) 已知抛物线 $C: y^2=4x$ 焦点为 F , 直线 MN 过焦点 F 且与抛物线 C 交于 M, N 两点, P 为抛物线 C 准线 l 上一点且 $PF \perp MN$, 连接 PM 交 y 轴于 Q 点, 过 Q 作 $QD \perp MF$ 于点 D , 若 $|MD|=2|FN|$, 则 $|MF| = \underline{\underline{\sqrt{3}+2}}$.

【分析】 直线 MN 的方程为 $y=k(x-1)$, 代入抛物线方程可得 $k^2x^2 - (2k^2+4)x+k^2=0$, 求出 k 的值可得 M 的坐标, 即可得出结论.

【解答】 解: 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $y=k(x-1)$, 代入抛物线方程可得 $k^2x^2 - (2k^2+4)x+k^2=0$

$$\therefore x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2},$$

$$2|FN|=|MD|, \text{ 可得 } 2(x_2+1)=|MD|,$$

$$\therefore \frac{MD}{MF} = \frac{MQ}{MP}, \therefore \frac{2(x_2+1)}{x_1+1} = \frac{x_1}{x_1+1}, \therefore x_2 = \frac{1}{2}x_1 - 1,$$

$$\text{联立可得 } x_1 = 2 + \frac{8}{3k^2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{k^2+2+2\sqrt{1+k^2}}{k^2},$$

$$\therefore 2 + \frac{8}{3k^2} = \frac{k^2+2+2\sqrt{1+k^2}}{k^2},$$

$$\therefore 3k^2 = 4\sqrt{3}+4,$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{3}+1,$$

$$\therefore |MF| = \sqrt{3}+2,$$

故答案为 $\sqrt{3}+2$.

【点评】 本题考查抛物线的方程与性质, 考查直线与抛物线的位置关系, 考查学生的计算能力, 属于中档题.

三、解答题

17. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线 l 垂直于直线 $y=x$, 求实数 a 的值及直线 l 的方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 若 $x > 1$, 求证: $\ln x < x - 1$.

【分析】(1) 求出函数的导数, 根据切线的斜率求出 a 的值, 从而求出函数的切点, 求出切线方程即可;

(2) 求出函数的导数, 通过讨论 a 的范围, 求出函数的单调区间即可;

(3) 由 $a=1$ 时, $f(x) = \ln x - x + 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 得到 $f(x) < f(1)$, 从而证明结论.

【解答】解: (1) $\because f(x) = \ln x - ax + 1$ ($a \in \mathbb{R}$), 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - a,$$

\therefore 函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线 l 的斜率 $k=f'(1) = 1 - a$,

\because 切线 l 垂直于直线 $y=x$,

$$\therefore 1 - a = -1, \therefore a = 2,$$

$$\therefore f(x) = \ln x - 2x + 1, f(1) = -1,$$

\therefore 切点为 $(1, -1)$,

$$\therefore \text{切线 } l \text{ 的方程为 } y + 1 = -(x - 1),$$

即 $x + y = 0$.

$$(2) \text{ 由 (1) 知: } f'(x) = \frac{1}{x} - a, x > 0$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} - a > 0$, 此时 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$;

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x} = \frac{-a(x - \frac{1}{a})}{x}$$

若 $0 < x < \frac{1}{a}$, 则 $f'(x) > 0$; 若 $x > \frac{1}{a}$, 则 $f'(x) < 0$,

此时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, \frac{1}{a})$, 单调递减区间是 $(\frac{1}{a}, +\infty)$,

综上所述:

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, \frac{1}{a})$, 单调递减区间是 $(\frac{1}{a}, +\infty)$.

(3) 由 (2) 知: 当 $a=1$ 时, $f(x) = \ln x - x + 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore x > 1$ 时, $f(x) < f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$,

$\therefore x > 1$ 时, $\ln x - x + 1 < 0$, 即 $\ln x < x - 1$.

【点评】 本题考查了切线方程问题, 考查函数的单调性、最值问题, 考查导数的应用以及不等式的证明, 是一道中档题.

18. 在直角坐标系 xOy 中, 已知定圆 $M: (x+1)^2 + y^2 = 36$, 动圆 N 过点 $F(1, 0)$ 且与圆 M 相切, 记动圆圆心 N 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 设 A, P 是曲线 C 上两点, 点 A 关于 x 轴的对称点为 B (异于点 P), 若直线 AP, BP 分别交 x 轴于点 S, T , 证明: $|OS| \cdot |OT|$ 为定值.

【分析】 (1) 由题意, $|NM| + |NF| = 6 > |FM|$, 由椭圆定义知, 圆心 N 的轨迹为椭圆, 且 $2a=6, c=1$, 即可求曲线 C 的方程;

$$(2) |OS| \cdot |OT| = |x_S x_T| = \left| \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_1 + y_0} \right| = \left| \frac{x_0^2 y_1^2 - x_1^2 y_0^2}{y_1^2 - y_0^2} \right|,$$

即可证明结论.

【解答】 解: (1) 因为点 $F(1, 0)$ 在 $M: (x+1)^2 + y^2 = 36$ 内, 所以圆 N 内切于圆 M , 则 $|NM| + |NF| = 6 > |FM|$,

由椭圆定义知, 圆心 N 的轨迹为椭圆, 且 $2a=6, c=1$, 则 $a^2=9, b^2=8$,

所以动圆圆心 N 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

(2) 设 $P(x_0, y_0), A(x_1, y_1), S(x_S, 0), T(x_T, 0)$, 则 $B(x_1, -y_1)$,

由题意知 $x_0 \neq \pm x_1$. 则 $k_{AP} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, 直线 AP 方程为 $y - y_1 = k_{AP}(x - x_1)$,

令 $y=0$, 得 $x_S = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0}$, 同理 $x_T = \frac{x_0(-y_1) - x_1 y_0}{(-y_1) - y_0} = \frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_1 + y_0}$,

于是 $|OS| \cdot |OT| = |x_S x_T| = \left| \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \cdot \frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_1 + y_0} \right| = \left| \frac{x_0^2 y_1^2 - x_1^2 y_0^2}{y_1^2 - y_0^2} \right|,$

又 $P(x_0, y_0)$ 和 $A(x_1, y_1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 上,

故 $y_0^2 = 8(1 - \frac{x_0^2}{9})$, $y_1^2 = 8(1 - \frac{x_1^2}{9})$, 则

$$y_1^2 - y_0^2 = \frac{8}{9}(x_0^2 - x_1^2), \quad x_0^2 y_1^2 - x_1^2 y_0^2 = 8x_0^2(1 - \frac{x_1^2}{9}) - 8x_1^2(1 - \frac{x_0^2}{9}) = 8(x_0^2 - x_1^2)$$

所以 $|OS| \cdot |OT| = \left| \frac{x_0^2 y_1^2 - x_1^2 y_0^2}{y_1^2 - y_0^2} \right| = \left| \frac{8(x_0^2 - x_1^2)}{\frac{8}{9}(x_0^2 - x_1^2)} \right| = 9.$

【点评】 本题考查椭圆的定义与方程, 考查定值的证明, 考查学生分析解决问题的能力, 属于中档题.

19. 已知圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 8$, 定点 $A(1, 0)$, M 为圆上一动点, 线段 m 的垂直平分线交线段 MC 于点 N , 设点 N 的轨迹为曲线 E .

(I) 求曲线 E 的方程;

(II) 若经过 $F(0, 2)$ 的直线 L 交曲线 E 于不同的两点 G, H (点 G 点 F, H 之间), 且满足 $\overrightarrow{FG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{FH}$, 求直线 L 的方程.

【分析】 (I) 首先利用点 N 的坐标为 (x, y) , NP 为线段 AM 的平分线, 所以: $|NA| = |MN|$, 又点 N 在 CM 上, $C: (x+1)^2 + y^2 = 8$, 半径 $r = 2\sqrt{2}$, 所以: $|NC| + |NM| = 2\sqrt{2}$, $|NC| + |MA| = |NC| + |NM| = 2\sqrt{2} > |AC|$ 所以: 点 N 的轨迹是以 A, C 为焦点的椭圆. 设方程为: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 进一步求出结果.

(II) 利用分类讨论思想: 设直线的方程①斜率存在②斜率不存在, 利用直线和曲线的位置关系建立方程组, 进一步利用向量的坐标相等求出结果.

【解答】 解: (I) 设点 N 的坐标为 (x, y) , NP 为线段 AM 的平分线,

所以: $|NA| = |MN|$,

又点 N 在 CM 上, 圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 8$, 半径 $r = 2\sqrt{2}$,

所以: $|NC| + |NM| = 2\sqrt{2}$,

$$|NC|+|MA|=|NC|+|NM|=2\sqrt{2}>|AC|$$

所以：点 N 的轨迹是以 A、C 为焦点的椭圆.

$$\text{设方程为: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0),$$

$$2a = 2\sqrt{2}, \text{ 所以: } a = \sqrt{2}, c = 1,$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 1,$$

$$\text{所以曲线 E 的方程为: } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(II) 设 G(x₁, y₁), H(x₂, y₂), 当直线 GH 的斜率存在时, 设直线的斜率为 k, 则: 直线 GH 的方程为: y=kx+2,

$$\text{所以: } \begin{cases} y=kx+2 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 整理得: } (\frac{1}{2} + k^2)x^2 + 4kx + 3 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta > 0 \text{ 解得: } k^2 > \frac{3}{2},$$

$$\text{且: } x_1 + x_2 = -\frac{4k}{\frac{1}{2} + k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{3}{\frac{1}{2} + k^2}, \quad \textcircled{1}$$

$$\text{由于: } \overrightarrow{FG} = (x_1, y_1 - 2), \quad \overrightarrow{FH} = (x_2, y_2 - 2),$$

$$\text{且: } \overrightarrow{FG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{FH},$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{3}{5}x_2,$$

$$\text{结合 } \textcircled{1} \text{ 得: } \frac{3}{5}(-\frac{5k}{1+2k^2}) = -\frac{6}{1+2k^2},$$

$$\text{解得: } k^2 = 2 > \frac{3}{2},$$

$$\text{直线 l 的方程为: } y = \pm\sqrt{2}x + 2,$$

当直线 HG 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为: x=0, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FH}$ 与 $\overrightarrow{FG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{FH}$ 矛盾,

所以直线 l 的方程为: $y = \pm\sqrt{2}x + 2$.

【点评】 本题考查的知识要点: 曲线方程的求法, 直线和曲线的位置关系, 向量的坐标运算, 直线方程的求法, 属于中档题.

$$20. \text{ 已知函数 } f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x + \frac{1}{2}, \quad g(x) = m \cos(x + \frac{\pi}{3}) - m + 2$$

(1) 若对任意的 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, 均有 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 求 m 的取值范围;

(2) 若对任意的 $x \in [0, \pi]$, 均有 $f(x) \geq g(x)$, 求 m 的取值范围.

【分析】(1) 利用两角和与差的三角函数化简函数的解析式, 求出两个函数的最值, 列出不等式求解即可.

(2) 转化不等式为: 函数恒成立, 通过余弦函数的范围列出关系式, 然后求解即可.

【解答】解: (1) 函数 $f(x) = \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + \frac{1}{2}$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x\right) + 1$$

$$= -\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1,$$

$$\text{当 } x \in [0, \pi] \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right],$$

$$\therefore \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in [-1, 1],$$

$$\therefore f(x) \in [0, 2];$$

$$\text{对于 } g(x) = m \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - m + 2 \quad (m > 0),$$

$$x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right],$$

$$m \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-m, \frac{1}{2}m\right],$$

$$\therefore g(x) \in \left[-2m + 2, 2 - \frac{1}{2}m\right],$$

若对任意 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立,

可得: $0 \geq 2 - \frac{1}{2}m$, 可得 $m \geq 4$.

(2) 对任意的 $x \in [0, \pi]$, 均有 $f(x) \geq g(x)$,

$$\text{即: } f(x) - g(x) = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 - m \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + m - 2$$

$$= \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) - m \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + m - 1$$

$$= 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - m \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + m - 2$$

$$= 2\left[\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{m}{4}\right]^2 - \frac{m^2}{8} + m - 2 \geq 0,$$

$$\because x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right],$$

$$\therefore \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \in \left[-1, \frac{1}{2} \right],$$

当 $-1 \leq \frac{m}{4} \leq \frac{1}{2}$ 即: $-4 \leq m \leq 2$ 时, $-\frac{m^2}{8} + m - 2 \geq 0$, 解得 $m=4$. 无解.

当 $\frac{m}{4} > \frac{1}{2}$ 即 $m > 2$ 时, $\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ 可得: $\frac{1}{2} - \frac{m}{2} + m - 2 \geq 0$, 解得 $m \geq 3$,

当 $\frac{m}{4} < -1$ 即 $m < -4$ 时, $\cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -1$ 可得: $2 + m + m - 2 \geq 0$, 解得 $m \geq 0$,

无解,

综上 m 的取值范围为 $[3, +\infty)$.

【点评】 本题考查函数恒成立问题, 三角函数的最值以及恒等变换的应用, 考查分类讨论思想的应用.