

数学（供理科考生使用）试题参考答案和评分参考

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题不给中间分。

一. 选择题。

- (1) (A) (2) (A) (3) (C) (4) (D) (5) (B) (6) (A)
(7) (B) (8) (B) (9) (D) (10) (C) (11) (C) (12) (B)

二. 填空题。

- (13) 2 (14) ②③④⑤ (15) $\{a \mid -9 < a \leq 0\}$ (16) 1

三. 解答题。

(17) 解：

(I) 因为 $a + c = 2b$ ，由正弦定理得 $\sin A + \sin C = 2 \sin B$

又因为 $A = 2C$ 且 $A + B + C = \pi$ ，

所以 $\sin 2C + \sin C = 2 \sin(\pi - 3C)$ 。

整理得 $8 \cos^2 C - 2 \cos C - 3 = 0$ 。

解得 $\cos C = \frac{3}{4}$ 或 $\cos C = -\frac{1}{2}$ (舍)。

故 $\cos C = \frac{3}{4}$ 。6 分

(II) 因为 $\cos C = \frac{3}{4}$ ，所以 $\sin C = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 。

所以 $\sin A = \sin 2C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ ， $\cos A = \cos 2C = \frac{1}{8}$ ；

$\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{5\sqrt{7}}{16}$ 。

由正弦定理得 $b = 5$ ， $a = 6$ 。12 分

(18) 解：

(I) X 所有的可能取值为 3, 4, 5, 6。

$$P(X=3)=\frac{C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{20}, \quad P(X=4)=\frac{C_3^2}{C_6^3}=\frac{3}{20},$$

$$P(X=5)=\frac{C_4^2}{C_6^3}=\frac{6}{20}, \quad P(X=6)=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{10}{20}.$$

Y 所有的可能取值为1,2,3,4.

$$P(Y=1)=\frac{C_5^2}{C_6^3}=\frac{10}{20}, \quad P(Y=2)=\frac{C_4^2}{C_6^3}=\frac{6}{20},$$

$$P(Y=3)=\frac{C_3^2}{C_6^3}=\frac{3}{20}, \quad P(Y=4)=\frac{C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{20}.$$

Z 所有的可能取值为2,3,4,5.

$$P(Z=2)=\frac{4 \times C_1^1}{C_6^3}=\frac{4}{20}, \quad P(Z=3)=\frac{3 \times C_2^1}{C_6^3}=\frac{6}{20},$$

$$P(Z=4)=\frac{2 \times C_3^1}{C_6^3}=\frac{6}{20}, \quad P(z=5)=\frac{1 \times C_4^1}{C_6^3}=\frac{4}{20}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

(II) 由题意得,

$$E(X)=3 \times \frac{1}{20} + 4 \times \frac{3}{20} + 5 \times \frac{6}{20} + 6 \times \frac{10}{20} = \frac{21}{4};$$

$$E(Y)=1 \times \frac{10}{20} + 2 \times \frac{6}{20} + 3 \times \frac{3}{20} + 4 \times \frac{1}{20} = \frac{7}{4};$$

$$E(Z)=2 \times \frac{4}{20} + 3 \times \frac{6}{20} + 4 \times \frac{6}{20} + 5 \times \frac{4}{20} = \frac{7}{2}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

(19) 解:

(I) 连结 BD , 交 AC 于点 O , 连结 A_1O, A_1B, A_1D, A_1C .

因为 $A_1A = A_1A$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD$, $AB = AD$,

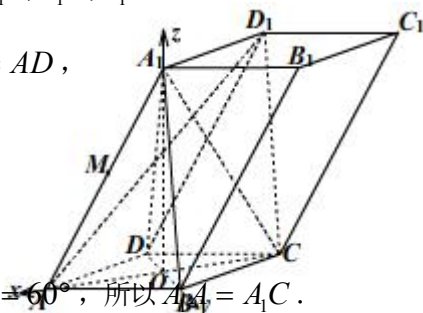
所以 $\triangle A_1AB \cong \triangle A_1AD$, 故 $A_1B = A_1D$.

又因为 $OB = OD$, 所以 $A_1O \perp BD$.

在 $\triangle A_1AC$ 中, $AA_1 = AC = 2\sqrt{3}$, $\angle A_1AC = 60^\circ$, 所以 $A_1A = A_1C$.

又因为 $OA = OC$, 所以 $A_1O \perp AC$.

从而 $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$.



以点 O 为坐标原点, 分别以直线 OA, OB, OA_1 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 如图所示. 则 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(-\sqrt{3}, 0, 0)$, $D(0, -1, 0)$, $A_1(0, 0, 3)$, $M(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2})$.

因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A_1D_1}$, 所以 $B_1(-\sqrt{3}, 1, 3)$, $C_1(-2\sqrt{3}, 0, 3)$, $D_1(-\sqrt{3}, -1, 3)$.

设 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面 ACD_1 的法向量.

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -2\sqrt{3}x_1 = 0, \\ -y_1 + 3z_1 = 0, \end{cases} \text{ 可取 } \mathbf{m} = (0, 3, 1).$$

设 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$ 是平面 C_1CD_1 的法向量.

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -\sqrt{3}x_2 + 3z_2 = 0, \\ -y_2 + 3z_2 = 0, \end{cases} \text{ 可取 } \mathbf{n} = (-\sqrt{3}, -3, -1).$$

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = -\frac{\sqrt{130}}{13}.$$

$$\text{即二面角 } A-CD_1-C_1 \text{ 的余弦值为 } -\frac{\sqrt{130}}{13}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

(II) 存在点 N , 使得 $MN \parallel$ 平面 ACD_1 , 此时点 N 为棱 BC 的中点.

$$\text{设 } \overrightarrow{CN} = \lambda \overrightarrow{CB}, \text{ 则 } \overrightarrow{CN} = (\sqrt{3}\lambda, \lambda, 0).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = (\sqrt{3}\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \lambda, -\frac{3}{2}).$$

$$\text{由 } MN \parallel \text{平面 } ACD_1 \text{ 得, } \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \text{ 即 } 3\lambda - \frac{3}{2} = 0.$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{2}.$$

故当且仅当点 N 为棱 BC 中点时, $MN \parallel$ 平面 ACD_1 成立. \dots\dots 12 \text{ 分}

(20) 解:

$$(I) \text{ 依题意有 } \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{2}c, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 又因为 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 所以得 } \begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = 1. \end{cases}$$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

.....2 分

$$(II) \text{ 依题意, 点 } A, C \text{ 满足 } \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = k_1x + m_1, \end{cases}$$

所以 x_A, x_C 是方程 $(2k_1^2 + 1)x^2 + 4k_1m_1x + 2m_1^2 - 2 = 0$ 的两个根.

$$\text{得 } \begin{cases} \Delta = 8 \cdot (2k_1^2 + 1 - m_1^2) > 0, \\ x_A + x_C = -\frac{4k_1m_1}{2k_1^2 + 1}. \end{cases}$$

所以线段 AC 的中点为 $(-\frac{2k_1m_1}{2k_1^2 + 1}, \frac{m_1}{2k_1^2 + 1})$.

同理, 所以线段 BD 的中点为 $(-\frac{2k_2m_2}{2k_2^2 + 1}, \frac{m_2}{2k_2^2 + 1})$.

$$\text{因为四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形, 所以 } \begin{cases} -\frac{2k_1m_1}{2k_1^2 + 1} = -\frac{2k_2m_2}{2k_2^2 + 1}, \\ \frac{m_1}{2k_1^2 + 1} = \frac{m_2}{2k_2^2 + 1}. \end{cases}$$

解得, $m_1 = m_2 = 0$ 或 $k_1 = k_2$ (舍).

即平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于原点 O .

.....6 分

$$(III) \text{ 点 } A, C \text{ 满足 } \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = k_1x, \end{cases}$$

所以 x_A, x_C 是方程 $(2k_1^2 + 1)x^2 - 2 = 0$ 的两个根, 即 $x_A^2 = x_C^2 = \frac{2}{2k_1^2 + 1}$

$$\text{故 } |OA| = |OC| = \sqrt{1 + k_1^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{2k_1^2 + 1}}.$$

$$\text{同理, } |OB| = |OD| = \sqrt{1 + k_2^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{2k_2^2 + 1}}.$$

又因为 $AC \perp BD$ ，所以 $|OB| = |OD| = \sqrt{1 + (\frac{1}{k_1})^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{2(\frac{1}{k_1})^2 + 1}}$ ，其中 $k_1 \neq 0$ 。

从而菱形 $ABCD$ 的面积 S 为

$$S = 2|OA| \cdot |OB| = 2\sqrt{1 + k_1^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{2k_1^2 + 1}} \cdot \sqrt{1 + (\frac{1}{k_1})^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{2(\frac{1}{k_1})^2 + 1}},$$

整理得 $S = 4 \sqrt{\frac{1}{2 + \frac{1}{(k_1 + \frac{1}{k_1})^2}}}$ ，其中 $k_1 \neq 0$ 。

故，当 $k_1 = 1$ 或 -1 时，菱形 $ABCD$ 的面积最小，该最小值为 $\frac{8}{3}$ 。……12 分

(21) 解：

(I) 由题意得 $f'(x) = \frac{(2x-1)\ln(2x-1) - 2x\ln x}{x(2x-1)[\ln(2x-1)]^2}$ ，其中 $x \in (1, +\infty)$ 。

设函数 $h(x) = (2x-1)\ln(2x-1) - 2x\ln x$ ，其中 $x \in [1, +\infty)$ 。

因为 $h'(x) = 2\ln(2 - \frac{1}{x}) > 0$ ，其中 $x \in (1, +\infty)$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调增函数，

从而当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $h(x) > h(1) = 0$ 。

即当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ 。

故，函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调增函数。……6 分

(II) 设 $x_2 > x_1 > 0$ ，则 $a^{x_2} > a^{x_1} > 1$ ，所以 $\frac{a^{x_2} + 1}{2} > \frac{a^{x_1} + 1}{2} > 1$ 。

由 (I) 得， $f(\frac{a^{x_2} + 1}{2}) > f(\frac{a^{x_1} + 1}{2})$ ，即 $g(x_2) > g(x_1)$ 。

故函数在 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数。

函数 $g(x)$ 的解析式为 $g(x) = \frac{1}{x \ln a} \ln(\frac{a^x + 1}{2})$ 。……8 分

(III) 当 $\alpha = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$) 时， $\sqrt[n]{\frac{\alpha^n + \beta^n}{2}} = \sqrt[n+1]{\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}}$ ，其中 $n \in \mathbf{N}^*$ 。

当 $\alpha \neq \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$) 时，不妨设 $\alpha > \beta$ 。

由 (II) 得，函数 $g(x) = \frac{1}{x} \ln(\frac{a^x + 1}{2})$ (其中 $a > 1$) 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数；

所以 $\frac{1}{n} \ln \left(\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + 1}{2} \right) < \frac{1}{n+1} \ln \left(\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} + 1}{2} \right)$, 其中 $\frac{\alpha}{\beta} > 1, n \in \mathbf{N}^*$.

从而 $\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + 1}{2}} < \sqrt[n+1]{\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} + 1}{2}}$, 其中 $\frac{\alpha}{\beta} > 1, n \in \mathbf{N}^*$.

故 $\sqrt[n]{\frac{\alpha^n + \beta^n}{2}} < \sqrt[n+1]{\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}}$, 其中 $\alpha > \beta, n \in \mathbf{N}^*$.

综上, 不等式 $\sqrt[n]{\frac{\alpha^n + \beta^n}{2}} \leq \sqrt[n+1]{\frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}}$ (其中 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+, n \in \mathbf{N}^*$) 成立.

……12 分

(22) 证明:

(I) 连结 AB . 因为 $\triangle PBC \sim \triangle PDB$, 所以 $\frac{BD}{BC} = \frac{PD}{PB}$.

同理 $\frac{AD}{AC} = \frac{PD}{PA}$.

又因为 $PA = PB$, 所以 $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$, 即 $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC}$.

……5 分

(II) 因为 $\angle BAC = \angle PBC = \angle DAQ$, $\angle ABC = \angle ADQ$,

所以 $\triangle ABC \sim \triangle ADQ$, 即 $\frac{BC}{AC} = \frac{DQ}{AQ}$.

故 $\frac{BD}{AD} = \frac{DQ}{AQ}$.

又因为 $\angle DAQ = \angle PBC = \angle BDQ$,

所以 $\triangle ADQ \sim \triangle DBQ$.

……10 分

(23) 解:

(I) 由题意知: $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$ 和 $\begin{cases} m = \rho \cos(\theta + \theta_0), \\ n = \rho \sin(\theta + \theta_0). \end{cases}$

即 $\begin{cases} m = \rho \cos \theta \cos \theta_0 - \rho \sin \theta \sin \theta_0, \\ n = \rho \sin \theta \cos \theta_0 + \rho \cos \theta \sin \theta_0, \end{cases}$

所以 $\begin{cases} m = x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0, \\ n = x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0. \end{cases}$ 4 分

(II) 由题意知 $\begin{cases} m = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \\ n = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \end{cases}$

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y) + \frac{1}{\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y}.$

整理得 $\frac{x^2}{2\sqrt{3}} - \frac{y^2}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = 1.$

该方程所表示的曲线是双曲线.10 分

(II) 由题意知 $\begin{cases} m = x \cos \frac{3\pi}{8} - y \sin \frac{3\pi}{8}, \\ n = x \sin \frac{3\pi}{8} + y \cos \frac{3\pi}{8}, \end{cases}$

所以 $x \sin \frac{3\pi}{8} + y \cos \frac{3\pi}{8} = x \cos \frac{3\pi}{8} - y \sin \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{x \cos \frac{3\pi}{8} - y \sin \frac{3\pi}{8}}.$

整理得 $\sqrt{2} \sin^2 \frac{\pi}{8} \cdot x^2 - \sqrt{2} \cos^2 \frac{\pi}{8} \cdot y^2 = 1$, 即 $\frac{x^2}{2\sqrt{2}+2} - \frac{y^2}{2\sqrt{2}-2} = 1.$

该方程所表示的曲线是双曲线.10 分

(24) 解:

(I) 设 $g(x) = f(x) - |x - 4|$. 所以 $g(x) = \begin{cases} -x - 4, & (x \leq -3), \\ x + 2, & (-3 < x \leq -1), \\ 3x + 4, & (-1 < x \leq 4), \\ x + 12, & (x > 4). \end{cases}$

解得: $-4 < x < -2$, 即不等式 $f(x) < |x - 4|$ 的解集是 $\{x | -4 < x < -2\}.$

.....5 分

(II) 由绝对值三角不等式得:

$|x + a| + |x + 1| + |a + 1| \geq |x + a - (x + 1)| + |a + 1| = |a - 1| + |a + 1|,$

当且仅当 $(x+a)(x+1) \leq 0$ 时，等号成立；

$|a-1| + |a+1| \geq 2$ ，当且仅当 $(a-1)(a+1) \leq 0$ 时，等号成立.

所以 $f(x) \geq 2$ ，当且仅当 $-1 \leq x \leq -a \leq 1$ 时，等号成立.10 分