三省三校数学模拟题答案

参考答案.

1、C.　2、B.　3、C.　4、A.　5、C.　6、C.

7、A.　8、A.　9、D.　10、C.　11、C.　12、A

13、$8+8\sqrt{2}+8\sqrt{26}$　　14、(1)(3)(5)

15、答案：$\{0\}$　16、答案：(3)(4)

17 答案：（Ⅰ）Q $2S_n=a_n+n^2\ \therefore$ 当$n\geq 2$时,$2S_{n-1}=a_{n-1}+(n-1)^2$

以上两式相减得 $2a_n=n^2-(n-1)^2+a_n-a_{n-1}$，即 $a_n+a_{n-1}=2n-1$

$\therefore a_{n+1}+a_n=2n+1$，相减有 $d=1$。

又当 $n=1$ 时，由 $2S_1=a_1+1$ 解得 $a_1=1$

所以 $\{a_n\}$ 通项公式是 $a_n=n(n\in N^*)$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $c_n=\begin{cases}2n+1, & n\text{为奇数}\\ 3\times 2^{n-1}+1, & n\text{为偶数}\end{cases}$

所以 $T_{2n}=(3+5+\cdots+2n+1)+3(2^1+2^3+\cdots+2^{2n-1})+n=n(n+2)+3\times\dfrac{2(1-4^n)}{1-4}+n$

$=2^{2n+1}+n^2+3n-2$.

18、（Ⅰ）证明：由 AB=AD=$\dfrac{1}{2}$CD=1，PD=$\sqrt{2}$，得 $\dfrac{PD}{DQ}=\dfrac{DC}{CE}=\sqrt{2}$，∠EDC=∠DCF=90°，

得△EDQ∽△DCF，所以 EQ⊥DF，又 AD⊥EQ，所以 EQ⊥平面 ADF

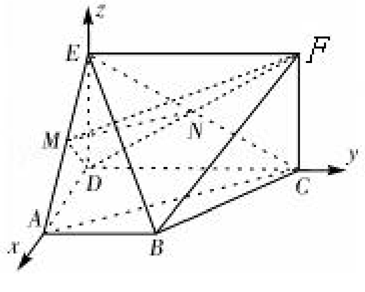
（Ⅱ）解:$\because \angle ADC=90°,\therefore AD\perp DC$，平面 PDCE⊥平面 ABCD，∴AD⊥平面 PDCE

∴AD⊥ED

以 D 为空间坐标系的原点，分别以 DA，DC，DP 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系　　则

$E(0,0,\sqrt{2}),B(1,1,0),C(0,2,0),\overrightarrow{EB}=(1,1,-\sqrt{2})$

$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0),\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$



设平面 EBC 的法向量 $\overrightarrow{m}=(x,y,1)$，应有

$$\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{EB}=(x,y,1)\cdot(1,1,\sqrt{2})=0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=(x,y,1)\cdot(-1,1,0)=0 \end{cases},$$

即 $\begin{cases} x+y-\sqrt{2}=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$，所以 $\vec{m}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$

设 EF 与 EBC 所成角的大小为 θ，$\because \overrightarrow{EF}=(0,2,0)$

$$\therefore \sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\vec{m}\rangle|=\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\vec{m}||\overrightarrow{EF}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times 2}=\frac{1}{2}$$

（Ⅲ）解：设

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DE}+\lambda\overrightarrow{EC}=(0,0,\sqrt{2})+\lambda(0,2,-\sqrt{2})=(0,2\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)$，$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$

设平面 MAD 的法向量 $\vec{n}=(x',y',1)$，应有 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=(x',y',1)\cdot(0,2\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}=(x',y',1)\cdot(1,0,0)=0 \end{cases}$，即

$\begin{cases} 2\lambda y'+\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda=0 \\ x'=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x'=0 \\ y'=\dfrac{\sqrt{2}(\lambda-1)}{2\lambda} \end{cases}$，所以 $\vec{n}=(0,\dfrac{\sqrt{2}(\lambda-1)}{2\lambda},1)$

平面 MAD 与平面 EBC 所成锐二面角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$

$$\therefore|\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle|=\frac{|\vec{m}\bullet\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{|\dfrac{\lambda-1}{2\lambda}+1|}{\sqrt{(\dfrac{\sqrt{2}(\lambda-1)}{2\lambda})^2+1}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2},\quad \therefore \lambda=0\text{或}\frac{2}{3}$$

所以，EC 上存在点 M 满足条件，M 与 E 重合，或 $EM=\dfrac{2}{3}EC$

19、答：（1）第三组的频率是 0.06×5=0.3；第四组的频率是 0.04×5=0.2；第五组的频率是 0.02×5=0.1

（2）①由题意可知，在分层抽样的过程中第三组应抽到 6×0.5=3 个，而第三组共有 100×0.3=30 个，所以甲乙两产品同时被选中的概率为 $P=\dfrac{C_{28}^{1}}{C_{30}^{3}}=\dfrac{1}{145}$

②第四组共有 2 个产品人进入面试，所以 X 的取值为 0,1,2

$P(X=0)=\dfrac{C_3^1+C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{6}{15}$；$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_2^1+C_2^1}{C_6^2}=\dfrac{8}{15}$；$P(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$；

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$EX=\frac{8}{15}+\frac{1}{15}\times 2=\frac{2}{3}$$

20、（Ⅰ）将直线与椭圆联立，由判别式等于零整理得 $4a^2+3b^2=18$，又由点在直线上，可知 $\frac{2}{a^2}+\frac{2}{3b^2}=1$

解得 $a^2=3,b^2=2$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

（Ⅱ）假设 C 上存在点 P，使得当 l 绕 F 转到某一位置时，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2).$则$P(x_1+x_2,y_1+y_2)$，由（Ⅰ）知 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，由题意知，l 的斜率一定不为 0，故不妨设 $l:x=ty+1$，由 $\begin{cases} x=ty+1 \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消去 x 并化简整理得 $(2t^2+3)y^2+4ty-4=0$，由韦达定理，得 $y_1+y_2=-\frac{4t}{2t^2+3}$，$\therefore x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2=\frac{6}{2t^2+3}$，$\therefore P(\frac{6}{2t^2+3},\frac{-4t}{2t^2+3})$ ∵ 点 P 在 C 上，$\therefore \frac{(\frac{6}{2t^2+3})^2}{3}+\frac{(-\frac{4t}{2t^2+3})^2}{2}=1$ 化简整理得 $4t^4+4t^2-3=0,$即$(2t^2+3)(2t^2-1)=0$

解得 $t^2=\frac{1}{2}$

当 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$P(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}),l$的方程为$\sqrt{2}x-y-\sqrt{2}=0$

当 $t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$P(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}),l$的方程为$\sqrt{2}x+y-\sqrt{2}=0$

故 C 上存在点 $P(\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$，使$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立，此时 l的方程为$\sqrt{2}x\pm y-\sqrt{2}=0$

21、（Ⅰ）$g'(x)=e^x-a$，

当$a\le 0$时， $g'(x)>0$，函数$g(x)$为 R 上单调递增函数

当$a>0$时，由$g'(x)>0$得$x>\ln a$，所以单调增区间是$(\ln a,+\infty)$，单调减区间是$(-\infty,\ln a)$。

（Ⅱ）$a>0$时，由（1）知在$x=\ln a$处$g(x)$取到最小值为$-a\ln a$ 令$-a\ln a\ge 0$解得$a\le 1$ 所以 a 的最大值为 1

(III)由（1）知 $e^x\ge x+1$，取 $x=-\dfrac{i}{2n}$，$i=1,3,\cdots 2n-1$, 得 $1-\dfrac{i}{2n}\le e^{-\frac{i}{2n}}$，即$(\dfrac{2n-i}{2n})^n\le e^{-\frac{i}{2}}$，

累加得：$(\dfrac{1}{2n})^n+(\dfrac{3}{2n})^n+\cdots+(\dfrac{2n-1}{2n})^n\le e^{-\frac{2n-1}{2}}+e^{-\frac{2n-3}{2}}+\cdots+e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}(1-e^{-n})}{1-e^{-1}}<\dfrac{\sqrt{e}}{e-1}$，∴

$1^n+3^n+\cdots+(2n-1)^n<\dfrac{\sqrt{e}}{e-1}(2n)^n$，故存在正整数 a=2．使得 $\therefore 1^n+3^n+\cdots+(2n-1)^n<\dfrac{\sqrt{e}}{e-1}(a_n)^n$．

22、（Ⅰ）连接 AD，由 AB//CD。可知∠Q=∠BAP=∠ADB 又有∠ACQ=∠ABD 可知△ACQ∽△ABD，因此$\dfrac{AC}{AQ}=\dfrac{AD}{BD}$，即$AC\cdot BD=AQ\cdot AD$又$AC=BD$，所以$AC^2=AQ\cdot AD$

（Ⅱ）由切割线定理求得 AP=$2\sqrt{3}$，由相似得 AC=3，又由切割线定理知 CD=$\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，ABDC 为等腰梯形，因此，其面积为$\dfrac{5\sqrt{23}}{3}$

23、（Ⅰ）圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=16$，直线 l：$\begin{cases} x=3+\dfrac{1}{2}t \\ y=5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$,t为参数

（Ⅱ）将直线的参数方程代入圆的方程可得$t^2+(2+3\sqrt{3})t-3=0$，设t_1,t_2是方程的两个根，则$t_1t_2=-3$，所以$|PA||PB|=|t_1||t_2|=|t_1t_2|=3$

24、（Ⅰ）$f(x)=\begin{cases} -x-3, & x\le \dfrac{1}{2} \\ 3x-1, & -\dfrac{1}{2}<x<2 \\ x+3, & x\ge 2 \end{cases}$，所以原不等式转化为

$$\begin{cases} x \le -\dfrac{1}{2} \\ -x-3 \le 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} -\dfrac{1}{2} < x < 2 \\ 3x-1 \le 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x \ge 2 \\ x+3 \le 2 \end{cases}$$

解得$-5 \le x \le 1$，所以原不等式的解集为$\{x \mid -5 \le x \le 1\}$

（Ⅱ）该命题等价于不等式 f（x）$\ge t^2$－3t 在[0,1]无解，由上问可知函数在[0,1]单调递增，

因此只要$f(x)_{\max} = f(1) < t^2 - 3t$，解得$t > 2$或$t < 1$