

例谈数学概念教学

摘 要：文章从数学概念教学的引入、理解、巩固应用三个阶段展开，从多个不同方面进行数学概念的教学探讨，最终提出数学概念的学习及数学概念形成的几个特点，并强调在数学概念教学中“教师引导”的不可替代的作用。

关键词：数学概念；教学探讨；内涵和外延；反馈；归类；教师引导；问题

前言

数学概念是数学知识中最基本的内容，是数学结构的重要组成部分。一切数学思维都以数学概念为基础，凭借数学概念来进行；每门数学分支都是在一个个最基本的数学概念的基础上发展、演变起来的，所以数学概念教学是重中之重。以下从数学概念教学的三个阶段^[1]（感知阶段、形成阶段、巩固和应用阶段）展开讨论。

一、注重概念的引入，重视引导学生明理究因，以揭示概念形成的必然性与合理性

数学知识的产生与发展是自然的、合理的，一个完美的数学概念的定义是数学界长期自然、合理“进化”的结果。正如人教版普通高中课程标准实施教科书的主编寄语中指出的：“数学概念、数学方法、数学思想的起源与发展都是自然的。如果有人感到某个概念不自然，是强加于人的，那么只要想一下它的背景，它的形成过程，它的应用，以及它与其他概念的联系，你就会发现它实际上是水到渠成、浑然天成的产物，不仅合情合理，甚至很有人情味。”因此教师在教学过程中应有意识地引导学生揭示数学概念的形成背景、形成过程以及它与其他概念的联系，揭示数学概念形成与完善的必然性、合理性。

1、给出模型，感性引入

形成准确概念的先决条件是使学生获得丰富和符合实际的感性材料，通过对感性材料的抽象、概括，来揭示概念所反映的本质属性，因此在教学中，要密切联系数学概念在现实世界中的实际模型，通过对实物、模型的观察，比较分析，在具有充分感性认识的基础上引入概念^[2]。如在引入积分学的概念之前，可以让学生想想曲边三角形的面积，或曲顶柱体体积的计算，学生必然会发现，过去所做的三角形的面积或是柱体的体积只是现实生活中特殊的或是理想状态下的均匀量的计算，从而对一般量的计算产生极大的好奇心理，引起求知的欲望。

2、结合知识的内在联系，直接引入

在概念的属与种的联系中，种概念的内涵在属概念的教学过程中，已有部分被揭示了，这就没有必要再经感性认识阶段，而可直接从已有的数学概念中加以定义。例如，在给出了“棱柱”的概念后，当底面为平行四边形时就成了平行六面体等，这样反而容易理解和对比记忆。

3、适时运用类比引入概念

把两个数学对象进行比较,找出它们相似的地方,从而推出这两个数学对象的其他一些属性,是引入概念的一种重要方法。例如,在引入空间直角坐标系的概念时,先提出高中学习的平面直角坐标系的概念加以类比。使学生从正交的坐标轴及其正方向、坐标面、卦限充分的对比认识空间直角坐标系。

4、“问题引导”的重要作用

人教版的《主编寄语》中提出:“要充分发挥问题的作用,问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性。要善于提问,学会提问,用自己的问题和别人的问题带动自己的学习。”我们认为在数学概念的教学中,教师更应该发挥问题的作用,以问题引导学生去感受概念引入的必然性与合理性;以问题引导学生合理地进行概念的抽象;以问题引导学生进行概念的“数学化”来培养语义转换能力;以问题引导学生学习在概念定义中进行科学的归纳。教师在备课时准备要充分,要能预料到学生在学习过程中可能出现的各种情况,要清楚在什么时候可能需要引导,准备以什么样的问题进行引导,引导的目的是什么。问题的设计要有针对性,要反映当前学习内容的本质;难度要适当,避免提出的问题又是学生难以解决的,要使他们想一想一般都能够得到解决的;问题的提出要适时恰时。

【案例1】 直线的倾斜角与斜率的概念引入

为什么要定义倾斜角?这是在引入倾斜角这个概念前必须让学生了解的一个问题,也就是让学生了解定义这一概念的目的与意义。为了刻画直线在坐标平面中的位置,为了区别经过同一点的不同直线的位置关系,你会用什么办法?能定义这样的一种量吗?(为什么想到用数量?)这样的问题引导能让学生明确定义的必要性以及如何定义这个概念。要用角来区别直线位置就需要一个基准,一个参照物,在坐标系内这个参照物你会找谁?那就是 x 轴及它的正方向。角是由同一点出发的两条射线组成的图形,结合图形,你会用哪个角来刻画直线的方向?为什么不选用与 x 轴的夹角?这样直线的倾斜角怎么定义就明确了。由于我们的目的是刻画直线的方向,自然直线的倾斜角的范围就应该是 $0^{\circ} \leq \alpha < 180^{\circ}$. 为什么不要 180° ?那是因为与 0° 所刻画的是同一种位置状态. 为什么不是 $0^{\circ} < \alpha \leq 180^{\circ}$,那是因为能用较小的就不用较大的. 这种引导很自然地让学生了解了我们为什么要学习这一概念,以及如何定义这一概念是合理的.

为什么要定义斜率?解析几何要通过点的坐标和直线方程来研究直线,如果只用倾斜角一个概念,那么它在实际运用中就难以直接通过坐标计算求得,并使方程形式变得复杂。定义斜率就是为了对直线倾斜的程度进行代数刻画,便于以后参与运算,以实现用代数方法处理几何问题。斜率该怎么定义呢?其实我们要刻画的直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度,过去我们在学习解直角三角形时,教科书上就说过:斜坡坡面的铅直高度 h 与水平宽度 l 的比值 i 叫做坡度;如果把坡面与水平面的夹角 α 叫做坡角,

那么 $i = \frac{h}{l} = \tan \alpha$ ；坡度越大 $\Leftrightarrow \alpha$ 角越大 $\Leftrightarrow$ 坡面越陡，所以 $i = \tan \alpha$ 可以反映坡面倾斜的程度。于是我们很自然地会想到把倾斜角的正切规定为斜率即规定： $k = \tan \alpha$ 。至此，对直线倾斜程度的几何、代数两方面的刻画工作都已经完成。但是对它们之间的关系同学们还需要加强理解认识。我们可以设计如下问题让学生探究：当直线的倾斜角在锐角范围内变化时，直线的斜率的变化范围如何？当直线的倾斜角在钝角范围内变化时，直线的斜率又怎么变化？当直线的倾斜角是零度或直角时，直线的斜率为多少？如果两条（不重合）直线都有斜率，那么两直线平行时，倾斜角与斜率有什么关系？反之又如何？

通过这样的问题引导教学，为什么要学定义以及为什么如此定义的前因后果就显得既合理又简单，对学生来说也容易接受并乐意接受。这样做学生就能感受到“数学是自然的”，清楚的，也能很好地培养学生的逻辑思维能力。

二、概念的理解

理解概念是掌握概念的前提，理解是在感知的基础上，通过思维加工，把新知识同化于已有的认知结构中，是一个复杂的心理过程。所以在教学中必须通过多种途径，采用多种不同方法进行分析、讲解，使学生对概念有较透彻的理解。在教学中需要教师通过问题努力揭示数学概念、法则、结论的发展过程和本质。帮助学生自主探索，理解数学概念的形成过程，数学法则的发展过程，帮助学生克服机械记忆概念的学习方式，增强学好数学的愿望和信心。

1、充分揭示概念的内涵和外延 数学概念是揭示现实世界空间形式与数学关系本质属性的思维形式，内涵和外延是构成数学概念的两个重要方面。数学概念的内涵是反映数学对象的本质属性的总和，外延是数学概念所反映的对象的全体。充分揭示概念的内涵和外延有助于加深对概念的理解。

2、加强对表示概念的数学符号的理解 数学概念本身就较抽象，加上符号表示，从而使概念更抽象化，因此教学中必须使学生真正理解符号的含义。

3、“形义”结合理解概念 “形义”结合指的是在数学概念教学中充分利用图形与实例，使抽象的概念直观化、模型化、具体化，使新旧概念之间的关系明朗化、系统化。通过揭示概念“形”与“义”之间的联系，使学生加深对概念的理解和掌握。“形义”结合，构“形”是关键。老师要有意识地联系学生生活去认识发掘数学概念的直观形象或实例，并赋予其具体意义。“形”是为“义”服务的，构“形”的目的是要揭示“义”。因此，在教学中应特别重视数学概念几何意义的揭示，数学概念的几何意义对概念作出了直观的解释，它使概念更直观、更易于理解。

【案例2】 导数概念第一课时——平均速度与瞬时速度

实验教材的例1创设了适合每位学生学习的情景——百米跑。

老师：小王的 100 米成绩是 12 秒，很快的速度。这里讲的是他跑这 100 米的平均速度，在他撞线时肯定有速度，我们能否知道他撞线时的速度？

学生议论：不知道加速度呀；也不一定是匀加速呀……

老师明确说明：百米赛跑刚起跑加速度大，中间几乎是匀速，冲刺时又可能加速，整个过程不可能是匀加速运动。

学生的讨论陷入了僵局。这时老师就处于不能自己讲又不能一味等的两难境地。合理的问题引导才是让学生思维突破的上策。

老师引导：速度是路程与时间的比值，我们能不能找一种近似的方法来描述撞线的速度呢？

受到启发后，随即有同学举手回答：用最后 1 秒里跑的路程除以时间，或者是找出最后一段时间里的路程除以时间。（很多同学认可！）

老师继续引导：假设第 12 秒里小王跑了 10 米，那么第 12 秒里的平均速度就是 10 米/秒，我们可以用 10 米/秒来近似地描述他撞线的速度。如果他在最后的 0.5 秒里跑了 5.5 米，那么他在最后半秒里的速度是 11 米/秒，我们也可以用这个速度近似描述他撞线的速度。请同学思考：这种用一段较短时间里的平均速度近似描述撞线速度的办法，怎样描述才会更精确一些呢？

学生抢着回答：时间取得越短越精确。

另一学生又站起来说：时间越来越小渐渐趋向于 0 时，平均速度就越来越接近于瞬时速度。

同学们喜形于色，议论纷纷。

老师继续引导：那平均速度与瞬时速度是不是一回事呀？

同学齐答：不是。

通过上述问题的引导教学，同学们经历了一次跟随老师“再发现,再创造”的过程，亲历过的发现过程会给他留下更为深刻的印象，对此概念的理解也更准确更深刻。

三、采用多种方法巩固概念

概念的形成过程教学就是让学生参与和经历概念形成的整个思维过程。在这个过程中，蕴含着数学最基本的思想与方法,如归纳、类比、抽象等。我们知道，数学概念能够形成深刻的印象，能够被学生牢牢记住，不是靠学生的死记硬背，机械记忆，更多的是需要去使用概念，对概念做进一步的研究和升华，在此过程中，除了进行学生相应的练习外，可以想象，完全放手让学生自己去探究某概念的起因、来历、如何定义并正确领悟很多时候是不现实的，这需要我们教师的引导。

1、及时反馈，在应用中巩固概念 我们不能企图一次课就解决一个概念，也不能为了讲清一个概念而大量向学生作知识介绍。我们必须让学生在正确理解概念的前提下进行运用，在运用过程中得到巩

固，通过练习及时纠正偏差。

2、承前启后，巩固概念 由于学生理解和掌握概念有一个反复加深的过程，因此在讲授新概念时，尽可能与旧知识联系起来，这样不但加强对新概念的理解，而且也重复巩固了旧知识，“承前启后，温故而知新”。如有了“极限”概念之后，利用它可以把扇形的面积 $s = \frac{1}{2}lr$ (l 为弧长， r 为半径) 看成分割成很小的无数个三角形面积的和，球冠的面积可看成无数个内接圆台的侧面积之和等，这样既提高了对这些旧概念的巩固复习，也加深了对“极限”、“无穷小”概念的理解。

3、口诀记忆，巩固概念 在教学中，教师应不失时机运用相对直观，通俗易懂的语言向学生表象概念的抽象规定，让学生能自觉的学会利用表象来协助抽象思维。如三角函数诱导公式教学中，可以用“奇变偶不变，符号看象限”，使学生对转化的繁琐过程明朗化，线条化。教学实践表明，通过恰当的语义编码，口诀记忆，可把抽象的数学概念教活，达到事半功倍之效。

3、系统归类，巩固概念 现代认知心理学研究表明，学生的知识，概念如果不经整理杂乱地放在脑子里是很难被提取的，所以在每一教学单元结束后，要及时进行概念总结，在总结时要特别重视同类概念的区别和联系，从不同角度出發，使概念系统合理归类。并且经过教师适当的引导，使学生充分参与进来，以概念学习为载体，在学习方法上得到提升，感受到学习方法的乐趣，更加积极主动的投入到学习过程中来。

【案例 3】：排列(第一课时)教学片断

(投影)问题 1 从甲、乙、丙 3 名工人中选出 2 名分别上日班和晚班，问有多少种不同的选法？你能列举出所有可能的方案吗？

问题 2 从 a, b, c, d 这 4 个字母中，每次取出 3 个按顺序排成一列，共有多少种不同的排法？你能写出所有排法吗？(学生分析讨论，稍候)

老师：通过前两节课两个原理的学习，解决这两个问题对同学们来说应该都是轻松的。今天老师旧题重提，自然不会再关注这两个问题怎么解决。老师想问的是：通过你的思考与解读，当你把问题解决后，你对两个问题还有其它感悟吗？你还想到些什么？

学生是从没思考过这个问题，也没意识到老师会提出这么个问题，学生一时反应不过来。这时教师就应该用问题去引导同学思维的方向。

老师：老师再进一步给你们点反思的方向：可以从问题类型、问题关注及其解决方法等方面出发想想有什么值得你反思与探究的问题吗？

学生 1：我觉得这两个问题类型一样。

老师：那你觉得这是个什么样类型的问题呢？

学生 1：都是从一些不同的东西中取出一部分东西并将它们排成一行。

老师：归纳得很好，在这两个问题里是从一些人和字母中取出一部分排成一行，可能在其它数学问题里也可能是其它“东西”。但把它们称为“东西”，总觉得太生活化了。可能我们的前辈数学家们也意识到了这点，所以他们把这类“东西”抽象成一个更有数学味的概念——元素。

同时老师将生 1 的反思用抽象后的概念板书下来：

问题类型：从一些不同的元素中取出一部分元素并将它们排成一行。

接下来老师通过不断设计问题一步步引导学生对这类问题的问题关注与问题解决方法上的共性进行分析归纳，让学生清晰地意识到这是一类在问题类型、问题关注以及问题解决方法上存在共性的问题，如果我们把这类问题归纳并建立起一套完整数学理论，那在以后的学习中对这类问题就有了理论的依据，极大地调动了学生思维的积极性和参与的热情。

四、关于数学概念问题的几点总结

1、概念的形成需要一个过程 与人生哲理等概念不同，数学概念具有叠加性，也就是说新概念是在旧概念叠加的基础上来认识的^[3]。概念是数学中的一个根本问题，不是靠背，而是在不断地运用中逐渐形成的，须经过比较、实践、摸索、总结、归纳等过程，最后建立一个完整的概念。

2、概念具有长期性 每个概念都有一个失败、认识、再失败的过程，伴随着你对这个概念的错误理解，在挫折中不断加深的。

3、概念是随着一个人知识的增加而不断深入的 学数学对一个人建立完整的思维方式很重要，随着对不同数学概念的深入理解，人们处理问题的方式可以越来越趋于严谨。

4、要建立一个数学概念网 数学是一个个概念的点阵，所有的相关的、从属的概念要在头脑中形成一个网络。学概念要把不能纳入其中的或相关概念认识清楚。总概念中各相关概念是怎样发展的要有一个清晰的脉络。

5、教师在概念教学中起到重要作用 探究性教学不是放弃老师引导的教学，更不是放任学生自学的教学，在数学概念的探究性教学中，学生更需要老师的引导与启智，教师应是学生自主探究的引导者、组织者，当然教师在教学中的引导作用必须以确定学生主体地位为前提，引导不是简单地从这个知识点引到另一个知识点，更不是把学生的思维想方设法地引到你的教学设计中来，让学生跟着你的教学组织与教学设计走。本人认为在数学概念的探究性教学的组织与设计上，教师需要下的主要功夫在于“数学知识的问题化”：一方面，培养学生的数学问题意识，让学生感受现实生活中存在大量的数学信息，体验到用数学的视角提出问题的可能性；另一方面，课堂教学过程不应是纯粹的数学知识的学习，更要让

学生经历以问题为中心的数学思维的过程。唯如此，提高学生的数学素质与数学思维能力才能真正落到实处。

参考文献：

[1] 林崇德、沈德立、陈英和，《认知发展心理学》，浙江人民出版社出版，1996 年 12 月

[2] 张奠宙、戴再平，《数学教育研究导引》，江苏教育出版社出版，1994 年 10 月

[3] 盛群力，《教学进程与教学模式》，杭州大学教育系讲义，1996 年 1 月

[4]. 陶维林 利用教学内容的逻辑体系 培养学生的逻辑思维能力 数学通报 2007. 2

[5] 李昌官 让数学教学闪耀理性的光芒 数学通报 2006. 7