专题四　解析几何、坐标系与参数方程

时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．(导学号：05856057)(2017·**黑河调研**)已知过两点 $A(1,2a)$，$B(-a,2)$的直线的斜率为 1，则 $a=$(　　)

A．1　B．2　C．3　D．4

2．(导学号：05856058)若双曲线 E：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在双曲线 E 上，且$|PF_1|=3$，则$|PF_2|$等于(　　)

A．11　B．9　C．5　D．3

3．(导学号：05856059)(2017·**上饶联考**)“$a=1$”是“直线 l_1：$ax+2y-1=0$ 与 l_2：$x+(a+1)y+4=0$ 平行”的(　　)

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

4．(导学号：05856060)(2017·**泉州质检**)已知圆 M：$x^2+y^2-2ay=0(a>0)$截直线 $x+y=0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$，则圆 M 与圆 N：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的位置关系是(　　)

A．内切　B．相交　C．外切　D．相离

5．(导学号：05856061)(2017·**漳州调研**)设 $m\in\mathbf{R}$，过定点 A 的动直线 $x+my=0$ 和过定点 B 的动直线 $mx-y-m+3=0$ 交于点 $P(x，y)$，则$|PA|+|PB|$的取值范围是(　　)

A．$[\sqrt{5}，2\sqrt{5}]$　　B．$[\sqrt{10}，2\sqrt{5}]$

C．$[\sqrt{10}，4\sqrt{5}]$　D．$[2\sqrt{5}，4\sqrt{5}]$

6．(导学号：05856062)(2017·**济宁二模**)已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点为 F_1、F_2，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过 F_2 的直线 l 交 C 于 A、B 两点．若$\triangle AF_1B$ 的周长为 $4\sqrt{3}$，则 C 的方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　B.$\frac{x^2}{3}+y^2=1$　C.$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$　D.$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

7．(导学号：05856063)(2017·**株州联考**)已知点 $A(-2,3)$在抛物线 C：$y^2=2px$ 的准线上，过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B，记 C 的焦点为 F，则直线 BF 的斜率为(　　)

A.$\frac{1}{2}$　B.$\frac{2}{3}$　C.$\frac{3}{4}$　D.$\frac{4}{3}$

8．(导学号：05856064)(2017·**黄石调研**)已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 $F(3,0)$，过点 F 的直线交 E 于 A，B 两点．若 AB 的中点坐标为(1，－1)，则 E 的方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　B.$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$　C.$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　D.$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

9．(导学号：05856065)(2017·**江门质检**)已知 $a>b>0$，椭圆 C_1 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线 C_2 的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$C_1$ 与 C_2 的离心率之积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 C_2 的渐近线方程为(　　)

A．$x\pm\sqrt{2}y=0$　B.$\sqrt{2}x\pm y=0$　C．$x\pm2y=0$　D．$2x\pm y=0$

10．(导学号：05856066)(2017·**湘潭调研**)已知抛物线 $y^2=4x$ 上的点 P 到抛物线的准线的距离为 d_1，到直线 $3x-4y+9=0$ 的距离为 d_2，则 d_1+d_2 的最小值是(　　)

A.$\frac{12}{5}$　B.$\frac{6}{5}$　C．2　D.$\frac{\sqrt{5}}{5}$

11．(2017·**宜宾质检**)已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点，$A$，$B$ 分别为 C 的左，右顶点．P 为 C 上一点，且 $PF\perp x$ 轴．过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E.若直线 BM 经过 OE 的中点，则 C 的离心率为(　　)

A.$\frac{1}{3}$　B.$\frac{1}{2}$　C.$\frac{2}{3}$　D.$\frac{3}{4}$

12．(导学号：05856067)(2017·**黄岗调研**)已知抛物线 $y^2=2px$ 的焦点 F 与双曲线$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$ 的右焦点重合，抛物线的准线与 x 轴交于点 K，点 A 在抛物线上

且$|AK|=\sqrt{2}|AF|$，则△AFK的面积为(　　)

A．4　B．8　C．16　D．32

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．(导学号：05856068)(2017·**百色联考**)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$的一条渐近线为$\sqrt{3}x+y=0$，则$a=$________．

14．(2017·**天水二模**)若直线$3x-4y+5=0$与圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$相交于A，B两点，且$\angle AOB=120°$(O为坐标原点)，则$r=$________．

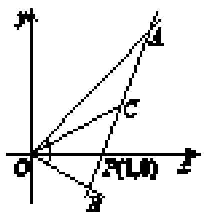
15．(2017·**阳江调研**)若圆$(x-3)^2+(y+5)^2=r^2$上有且只有两个点到直线$4x-3y=2$的距离等于1，则半径r的取值范围是________．

16．(导学号：05856070)(2017·**苏州质检**)已知椭圆C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，点$M$与$C$的焦点不重合．若$M$关于$C$的焦点的对称点分别为$A$，$B$，线段$MN$的中点在$C$上，则$|AN|+|BN|=$________．

三、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(导学号：05856071)(本小题满分10分)

(2017·**鸡西联考**)如图，射线OA，OB分别与x轴正半轴成45°和30°角，过点$P(1,0)$作直线AB分别交OA，OB于A，B两点，当AB的中点C恰好落在直线$y=\frac{1}{2}x$上时，求直线AB的方程．



18.(导学号：05856072)(本小题满分 12 分)

(2018·**安顺摸底考试**)已知圆 C：$x^2+(y-a)^2=4$，点 $A(1,0)$.

(1)当过点 A 的圆 C 的切线存在时，求实数 a 的取值范围；

(2)设 AM、AN 为圆 C 的两条切线，M、N 为切点，当 $MN=\frac{4\sqrt{5}}{5}$时，求 MN 所在直线的方程.

19.(本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1：$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数，$t\neq0$)，其中 $0\leqslant\alpha<\pi$.在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=2\sin\theta$，C_3：

$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.

(1)求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标；

(2)若 C_1 与 C_2 相交于点 A，C_1 与 C_3 相交于点 B，求$|AB|$的最大值．

20.(本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l：$y=t(t\neq 0)$交 y 轴于点 M，交抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$于点 P，M 关于点 P 的对称点为 N，连结 ON 并延长交 C 于点 H.

(1)求$\frac{|OH|}{|ON|}$；

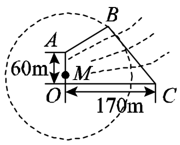
(2)除 H 以外，直线 MH 与 C 是否有其它公共点？说明理由．

21.(导学号：05856073)(本小题满分 12 分)

(2017·**潍坊二模**)如图，为保护河上古桥 OA，规划建一座新桥 BC，同时设立一个圆形保护区．规划要求：新桥 BC 与河岸 AB 垂直；保护区的边界为圆心 M 在线段 OA 上并与 BC 相切的圆，且古桥两端 O 和 A 到该圆上任意一点的距离均不少于 80 m．经测量，点 A 位于点 O 正北方向 60 m 处，点 C 位于点 O 正东方向 170 m 处(OC 为河岸)，$\tan\angle BCO=\dfrac{4}{3}$.

(1)求新桥 BC 的长；

(2)当 OM 多长时，圆形保护区的面积最大．



22.(导学号：05856074)(本小题满分 12 分)

(2017·**泉州质检**)已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点与短轴的两个端点是正三角形的三个顶点，点 $P(\sqrt{3}，\dfrac{1}{2})$在椭圆 E 上．

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)设不过原点 O 且斜率为$\frac{1}{2}$的直线 l 与椭圆 E 交于不同的两点 A，B，线段 AB 的中点为 M，直线 OM 与椭圆 E 交于 C，D，证明：$|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$.

专题四　解析几何、坐标系与参数方程

1.C

2．B　由题意知 $a=3$，$b=4$，$\therefore c=5$.由双曲线的定义有$||PF_1|-|PF_2||=|3-|PF_2||=2a=6$.$\therefore |PF_2|=9$.

3．A　由题意可知$\begin{cases}a(a+1)-2=0,\\4a+1\neq 0,\end{cases}$　解得 $a=-2$ 或 $a=1$，所以“$a=1$”是“直线 l_1：$ax+2y-1=0$ 与 l_2：$x+(a+1)y+4=0$ 平行”的充分不必要条件.

4．B　由 $x^2+y^2-2ay=0(a>0)$得 $x^2+(y-a)^2=a^2(a>0)$，所以圆 M 的圆心为$(0，a)$，半径为 $r_1=a$，因为圆 M 截直线 $x+y=0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$，所以$\frac{a}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{a^2-(\frac{2\sqrt{2}}{2})^2}$，解得 $a=2$，圆 N 的圆心为$(1,1)$，半径为 $r_2=1$，所以$|MN|=\sqrt{(0-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$，$r_1+r_2=3$，$r_1-r_2=1$，因为 $r_1-r_2<|MN|<r_1+r_2$，所以圆 M 与圆 N 相交，故选 B.

5．B　易得 $A(0,0)$，$B(1,3)$．设 $P(x，y)$，则消去 m 得：$x^2+y^2-x-3y=0$，所以点 P 在以 AB 为直径的圆上，$PA\perp PB$，所以$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=10$，令$|PA|=\sqrt{10}\sin\theta$，$|PB|=\sqrt{10}\cos\theta$，则$|PA|+|PB|=\sqrt{10}\sin\theta+\sqrt{10}\cos\theta=2\sqrt{5}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$．因为$|PA|\geqslant 0$，$|PB|\geqslant 0$，所以 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leqslant 1$，$\sqrt{10}\leqslant|PA|+|PB|\leqslant 2\sqrt{5}$.

6．A　由椭圆的性质知$|AF_1|+|AF_2|=2a$，$|BF_1|+|BF_2|=2a$，$\therefore\triangle AF_1B$ 的周长$=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4\sqrt{3}$，$\therefore a=\sqrt{3}$，$\therefore c=1$，$\therefore b^2=a^2-c^2=2$，$\therefore$椭圆的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，故选 A.

7．D　$\because A(-2,3)$在抛物线 $y^2=2px$ 的准线上，

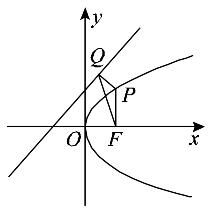
$\therefore -\frac{p}{2}=-2$，$\therefore p=4$，$\therefore y^2=8x$，设直线 AB 的方程为 $x=k(y-3)-2$①，将①与 $y^2=8x$ 联立，即$\begin{cases}x=k(y-3)-2\\y^2=8x\end{cases}$，得 $y^2-8ky+24k+16=0$②，则$\Delta=(-8k)^2-4(24k+16)=0$②，即 $2k^2-3k-2=0$，解得 $k=2$ 或 $k=-\frac{1}{2}$(舍去)，将 $k=2$ 代入①②解得$\begin{cases}x=8,\\y=8\end{cases}$　即 $B(8,8)$，又 $F(2,0)$，$\therefore k_{BF}=\frac{8-0}{8-2}=\frac{4}{3}$，故选 D.

8．D　根据椭圆的性质，$c=3$，又过点 $F(3,0)$和直线 AB 的中点$(1，-1)$的直线方程为 $x-2y-3=0$，联立方程组$\begin{cases}x-2y-3=0,\\b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,\end{cases}$消去 x，并整理得$(a^2+4b^2)y^2+12b^2y+9b^2-a^2b^2=0$，所以 $y_1+y_2=-\dfrac{12b^2}{a^2+4b^2}$，因为$\dfrac{y_1+y_2}{2}=-1$，所以 $a^2=2b^2$，又因为 $a^2-b^2=9$，解得 $a^2=18$，$b^2=9$，所以椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

9．A　椭圆 C_1 的离心率为$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，双曲线 C_2 的离心率为$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，所以$\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，化简：$a^4-b^4=\dfrac{3}{4}a^4$，即 $a^4=4b^4$，所以 $a=\sqrt{2}b$，所以双曲线 C_2 的渐近线方程是 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$，即 $x\pm\sqrt{2}y=0$.

10．A　$d_1+d_2=|PF|+d_2\geqslant|FQ|$，

$|FQ|=\dfrac{|3\times1-4\times0+9|}{5}=\dfrac{12}{5}$.



11．A　由题意设直线 l 的方程为 $y=k(x+a)$，

分别令 $x=-c$ 与 $x=0$ 得$|FM|=k(a-c)$，$|OE|=ka$，由$\triangle OBE\sim\triangle FBM$，

得$\dfrac{\frac{1}{2}|OE|}{|FM|}=\dfrac{|OB|}{|BF|}$，即$\dfrac{ka}{2k(a-c)}=\dfrac{a}{a+c}$，

整理得$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{3}$，所以椭圆离心率为 $e=\dfrac{1}{3}$.

12．D　依题意知，抛物线焦点坐标为$(4,0)$．作 AA' 垂直抛物线的准线，垂足为 A'，

根据抛物线定义$|AA'|=|AF|$，所以在$\triangle AA'K$ 中，$|AK|=\sqrt{2}|AA'|$，

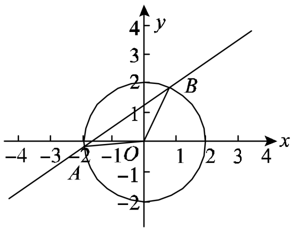
故$\angle KAA'=45°$，此时不妨认为直线 AK 的倾斜角为 45°，则直线 AK 的方

程为 $y=x+4$，

代入抛物方程 $y^2=16x$ 中得 $y^2=16(y-4)$，即 $y^2-16y+64=0$，解得 $y=8$，A 的坐标为(4,8).

故△AFK 的面积为$\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$.

13.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的渐近线为 $y=\pm\frac{x}{a}$，已知一条渐近线为 $\sqrt{3}x+y=0$，即 $y=-\sqrt{3}x$，因为 $a>0$，所以$\frac{1}{a}=\sqrt{3}$，所以 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



14．2　如图直线 $3x-4y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$交于 A、B 两点，O 为坐标原点，且∠$AOB=120°$，则圆心(0,0)到直线 $3x-4y+5=0$ 的距离为 $\frac{1}{2}r$，

$\frac{5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{2}r$，

∴$r=2$.故答案为 2.

15．(4,6)　∵圆心(3，−5)，直线 $4x-3y-2=0$，

∴$d=\frac{|12+15-2|}{\sqrt{16+9}}=5$，∴$4<r<6$.

16．12　设 MN 交椭圆点 P，连接 F_1P 和 F_2P(其中 F_1、F_2 是椭圆 C 的左、右焦点)，

利用中位线定理可得$|AN|+|BN|=2|F_1P|+2|F_2P|=2\times 2a=4a=12$.

17．由题意可得 $k_{OA}=\tan45°=1$，$k_{OB}=\tan(180°-30°)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线 l_{OA}：$y=x$，l_{OB}：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

设 $A(m，m)$，$B(-\sqrt{3}n，n)$，所以 AB 的中点 $C(\frac{m-\sqrt{3}n}{2}，\frac{m+n}{2})$，

由点 C 在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上，且 A，P，B 三点共线得 $\begin{cases}\frac{m+n}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m-\sqrt{3}n}{2},\\ \frac{m-0}{m-1}=\frac{n-0}{-\sqrt{3}-1},\end{cases}$ 解得 $m=\sqrt{3}$，

$\therefore A(\sqrt{3}，\sqrt{3})$，又 $P(1,0)$，$\therefore k_{AB}=k_{AP}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$，$\therefore l_{AB}$：$y=\frac{3+\sqrt{3}}{2}(x-1)$，

即直线 AB 的方程为$(3+\sqrt{3})x-2y-3-\sqrt{3}=0$.10 分

18．(1)过点 A 的切线存在，即点 A 在圆外或圆上，

$\therefore 1+a^2\geqslant 4$，$\therefore a\geqslant\sqrt{3}$或 $a\leqslant-\sqrt{3}$.4 分

(2)设 MN 与 AC 交于点 D，O 为坐标原点.

$\because MN=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，$\therefore DM=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

又 $MC=2$，$\therefore CD=\sqrt{4-\frac{4}{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$，

$\therefore \cos\angle MCA=\frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\because AC=\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\sqrt{5}$，$\therefore OC=2$，$AM=1$，

MN 是以点 A 为圆心，半径 $AM=1$ 的圆 A 与圆 C 的公共弦，圆 A 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$

圆 C 的方程为 $x^2+(y-2)^2=4$，或 $x^2+(y+2)^2=4$，

$\therefore MN$ 所在直线的方程为：$(x-1)^2+y^2-1-x^2-(y-2)^2+4=0$，

即 $x-2y=0$ 或$(x-1)^2+y^2-1-x^2-(y+2)^2+4=0$，

即 $x+2y=0$，因此，MN 所在直线的方程为 $x-2y=0$ 或 $x+2y=0$.12 分

19．(1)曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$，曲线 C_3 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0$.

联立$\begin{cases}x^2+y^2-2y=0,\\ x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ y=\frac{3}{2}.\end{cases}$

$\therefore C_2$与C_3交点的直角坐标为$(0,0)$和$(\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{3}{2})$.6 分

(2)曲线C_1的极坐标方程为$\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R}，\rho\neq 0)$，其中$0\leqslant\alpha<\pi$.

因此A的极坐标为$(2\sin\alpha，\alpha)$，

B的极坐标为$(2\sqrt{3}\cos\alpha，\alpha)$.

$\therefore |AB|=|2\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha|=4|\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})|$.

当$\alpha=\frac{5\pi}{6}$时，$|AB|$取得最大值，最大值为 4.12 分

20．(1)由已知得$M(0，t)$，$P(\frac{t^2}{2p}，t)$.

又N为M关于点P的对称点，故$N(\frac{t^2}{p}，t)$，ON的方程为$y=\frac{p}{t}x$，

代入$y^2=2px$整理得$px^2-2t^2x=0$，解得$x_1=0$，$x_2=\frac{2t^2}{p}$，

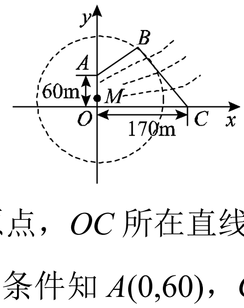
因此$H(\frac{2t^2}{p}，2t)$，$\therefore N$为OH的中点，即$\frac{|OH|}{|ON|}=2$.6 分

(2)直线MH与C除H以外没有其它公共点．理由如下：

直线MH的方程为$y-t=\frac{p}{2t}x$，即$x=\frac{2t}{p}(y-t)$.

代入$y^2=2px$得$y^2-4ty+4t^2=0$，解得$y_1=y_2=2t$，即直线MH与C只有一个公共点.

$\therefore$除H以外直线MH与C没有其它公共点.12 分



21．(1)如图，以O为坐标原点，OC所在直线为x轴，

建立平面直角坐标系xOy.由条件知$A(0,60)$，$C(170,0)$，直线BC的斜率$k_{BC}=-\tan\angle BCO=-\frac{4}{3}$.

又$\because AB\perp BC$，$\therefore$直线AB的斜率$k_{AB}=\frac{3}{4}$.

设点B的坐标为$(a，b)$.

则 $k_{BC}=\frac{b-0}{a-170}=-\frac{4}{3}$，$k_{AB}=\frac{b-60}{a-0}=\frac{3}{4}$.解得 $a=80$，$b=120$.

$\therefore BC=\sqrt{(170-80)^2+(0-120)^2}=150$.因此新桥 BC 的长是 $150m$.6 分

(2)设保护区的边界圆 M 的半径为 r m，$OM=d$m$(0\leqslant d\leqslant 60)$.

由条件知，直线 BC 的方程为 $y=-\frac{4}{3}(x-170)$，即 $4x+3y-680=0$.

由于圆 M 与直线 BC 相切，故点 $M(0，d)$到直线 BC 的距离是 r，

即 $r=\frac{|3d-680|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{680-3d}{5}$.

$\because O$ 和 A 到圆 M 上任意一点的距离均不少于 80m，

$\therefore \begin{cases} r-d\geqslant 80, \\ r-(60-d)\geqslant 80, \end{cases}$

即$\begin{cases} \frac{680-3d}{5}-d\geqslant 80, \\ \frac{680-3d}{5}-(60-d)\geqslant 80. \end{cases}$

解得 $10\leqslant d\leqslant 35$.故当 $d=10$ 时，$r=\frac{680-3d}{5}$最大，即圆面积最大.

$\therefore$当 $OM=10m$ 时，圆形保护区的面积最大.12 分

22．(1)由已知，$a=2b$.又椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点 $P(\sqrt{3}，\frac{1}{2})$，故$\frac{3}{4b^2}+\frac{\frac{1}{4}}{b^2}=1$，解得 $b^2=1$.

$\therefore$椭圆 E 的方程是$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.4 分

(2)设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m(m\neq 0)$，

$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

由方程组$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+y^2=1, \\ y=\frac{1}{2}x+m, \end{cases}$ 得 $x^2+2mx+2m^2-2=0$，……①

方程①的判别式为$\Delta=4(2-m^2)$，由$\Delta>0$，

即 $2-m^2>0$，解得$-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$.

由①得 $x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=2m^2-2$.

∴M 点坐标为$(-m,\ \frac{m}{2})$，

直线 OM 方程为 $y=-\frac{1}{2}x$，

由方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=-\frac{1}{2}x,\end{cases}$

得 $C(-\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2})$，$D(\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

∴$|MC|\cdot|MD|=\frac{\sqrt{5}}{2}(-m+\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}(\sqrt{2}+m)=\frac{5}{4}(2-m^2)$.

又$|MA|\cdot|MB|=\frac{1}{4}|AB|^2=\frac{1}{4}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]=\frac{5}{16}[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$

$=\frac{5}{16}[4m^2-4(2m^2-2)]=\frac{5}{4}(2-m^2)$.

∴$|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$.12 分