

高二理科数学试卷

考试时间：120 分钟 试题满分：150 分

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）。

1. 在复平面内，复数 $z = \sin 2 + i \cos 2$ 对应的点位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. $(1 + \frac{1}{2}x)^5$ 的展开式中的第三项的系数为（ ）

- A. 5 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{5}{8}$

3. 从 5 名男生和 2 名女生中选出 3 人参加某个座谈会，若这 3 人中既有男生又有女生，则不同的选法共有（ ）种。

- A. 35 B. 30 C. 25 D. 10

4. 复数 z 满足 $(1+2i)\bar{z} = 4+3i$, 那么 $z =$ （ ）

- A. $2-i$ B. $2+i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

5. 下列求导运算正确的是（ ）

- A. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \ln a$ B. $(e^{2x})' = 2xe^{2x-1}$

- C. $(\frac{1}{\sqrt{x}})' = -\frac{1}{2\sqrt{x^2}}$ D. $(\cos(x+1))' = -2\sin(x+1)$

6. 利用数学归纳法证明不等式 “ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}$ ($n \geq 2, n \in N^*$)” 的过程中，由 “ $n = k$ ” 变到 “ $n = k+1$ ” 时，左边增加了（ ）项

- A. 1 B. k C. 2^{k-1} D. 2^k

7. 某电视台连续播放 5 个广告，其中 3 个不同的全运会宣传广告和 2 个不同的商业广告。若要求最后播放的必须是全运会广告，且 2 个商业广告不能连续播放，则不同的播放种数为（ ）

- A. 18 B. 36 C. 54 D. 72

8. 已知 $C_{12}^4 = a, C_{12}^7 = b$ 则 $C_{13}^5 =$ （ ）

- A. $a+b$ B. $-a+b$ C. $2a-b$ D. $-a+2b$

9. 若 $(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}})^n$ 的展开式中存在常数项, 则 n 的值可以是 ()

A. 8 B. 9 C. 10 D. 12

10. $(x^2 + x - 2)^5$ 的展开式中 x^3 项的系数为 ()

A. -120 B. -40 C. 40 D. 120

11. 已知在半径为 R 的圆的内接三角形中, 等边三角形的面积是最大的. 请你运用类比推理的方法, 思考并计算在半径为 R 的球中, 其内接的三棱锥的体积最大值为 ()

A. $\frac{4\sqrt{3}}{9}R^3$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$ C. $\frac{4\sqrt{3}}{27}R^3$ D. $\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$

12. 已知函数 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d (b, c, d \in R)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有两个极值点, 则点

(b, c) 所在区域的面积为 ()

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 3

第 II 卷 (非选择题 满分 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填写在答题纸相应位置上.

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx =$ _____

14. 函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的单调递减区间是 _____

15. 现有 5 项不同的工程由甲、乙、丙 3 个工程队承包, 每队至少一项, 但甲承包的项目不超过 2 个, 不同的承包方案有 _____ 种

16. 若 $(x^2 + 1)(x - 2)^9 = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + \cdots + a_{11}(x - 1)^{11}$, 则

$(a_1 + 3a_3 + \cdots + 11a_{11})^2 - (2a_2 + 4a_4 + \cdots + 10a_{10})^2 =$ _____ (请用数字作答)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

已知曲线 $y = x^3 - 3x$.

(1) 求曲线在点 $A(1, -2)$ 处的切线方程;

(2) 求过点 $B(2, 2)$ 的曲线的切线方程.

18. (本题满分 12 分)

(1) 用数学归纳法证明： $n^3 + 5n(n \in N^*)$ 能被 6 整除;

(2) 设 a 为实数， $f(x) = x^2 + ax + a$. 求证： $|f(1)|$ 与 $|f(2)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$.

19. (本题满分 12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公比是 $(x + \frac{1}{4x^2})^4$ 展开式中第二项.

(1) 用 n 和 x 表示数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 计算并化简 $\sum_{k=1}^n C_n^k S_k$. (结果用 n 和 x 表示)

20. (本题满分 12 分)

在如图的杨辉三角中, 除每行首尾的数之外每一个数值是它上面的两个数之和, 它的前几行如下:

```
      1 1
     1 2 1
    1 3 3 1
   1 4 6 4 1
  1 5 10 10 5 1
  .....
```

在杨辉三角中, 有许多有意思的结论. 试求:

(1) 从第 3 行到第 10 行, 每一行中第 4 个数的和;

(2) 某一行中出现的相邻三个数, 它们的比是 1:2:3. 请求出这三个数.

21. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 e^{kx}$ ($k < 0$),

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对于任意的 $x_1, x_2 \in [-2, 1]$, $|f(x_1) - f(x_2)| < 4e^2(k+2)$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

22. (本题满分 12 分)

已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln(x+1) - ax$ ($x > 0$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 求证: 对任意的 $n \in N^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2+1} - \ln(n+1) > -1$.