

高二文科数学试卷

考试时间:120 分钟 试题满分:150 分

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

(1) 若命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 1 > 0$, 则 $\neg p$ 为 ()

(A) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 1 \geq 0$ (B) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 1 \leq 0$

(C) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 1 \leq 0$ (D) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - 3x + 1 \geq 0$

(2) 命题 $p: \forall x, y \in \mathbf{R}$, 如果 $xy = 0$, 则 $x = 0$ 或 $y = 0$. 下列判断正确的个数是 ()

①命题 p 的逆命题是: $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 如果 $x = 0$ 或 $y = 0$, 则 $xy = 0$;

②命题 p 的否命题是: $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 如果 $xy \neq 0$, 则 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$;

③命题 p 的逆否命题是: $\forall x, y \in \mathbf{R}$, 如果 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$, 则 $xy \neq 0$.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(3) 若 $p: \begin{cases} x > 2 \\ y > 1 \end{cases}$, $q: \begin{cases} x + y > 3 \\ x \cdot y > 2 \end{cases}$; 则 p 是 q 的 ()

(A) 充分非必要条件

(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分又不必要条件

(4) 设 a, b 是非零实数, 若 $a < b$, 则下列不等式成立的是 ()

(A) $a^2 < b^2$ (B) $ab^2 < a^2b$ (C) $\frac{1}{ab^2} < \frac{1}{a^2b}$ (D) $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$

(5) 如果正数 a, b, c, d 满足 $a + b = cd = 4$, 那么 ()

(A) $ab \leq c + d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一

(B) $ab \geq c + d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值唯一

(C) $ab \leq c + d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一

(D) $ab \geq c + d$, 且等号成立时 a, b, c, d 的取值不唯一

(6) 已知点 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点, 直线 l 经过点 F_1 且与椭圆 C 相交于

点 A, B . 则 $\triangle ABF_2$ 的周长等于 ()

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20

(7) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 满足 $S_n = 3^n + 1$, 数列 $\{a_n\}$ ()

(A) 是等差数列 (B) 既是等差数列又是等比数列
(C) 是等比数列 (D) 既不是等差数列又不是等比数列

(8) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n = 129 - 4n^2$, 此数列的前 n 项和为 S_n , 则数列 $\{S_n\}$ 的最大项是 ()

(A) S_7 (B) S_5 (C) S_{17} (D) S_{15}

(9) 数列 $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \dots, \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$ 的前 2014 项的和是 ()

(A) $\frac{4027}{2014}$ (B) $\frac{4028}{2015}$ (C) $\frac{4023}{2012}$ (D) $\frac{4024}{2013}$

(10) 某人向银行贷款 A 万元用于购房. 已知年利率为 r , 利息要按复利计算 (即本年的利息计入次年的本金生息). 如果贷款在今年 11 月 7 日完成, 则从明年开始, 每年的 11 月 6 日向银行等额还款 a 万元, n 年还清贷款 (及利息). 则 $a =$ ()

(A) $a = \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \cdot A$ (B) $a = \frac{r \cdot (1+r)^{n+1}}{(1+r)^{n+1} - 1} \cdot A$

(C) $a = \frac{r \cdot (1+r)^{n+1}}{(1+r)^n - 1} \cdot A$ (D) $a = \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^{n+1} - 1} \cdot A$

(11) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + \frac{\lambda}{n}$, 若数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则实数 λ 的取值范围为 ()

(A) $(-\infty, 1)$ (B) $(-\infty, 2)$ (C) $(-\infty, \frac{9}{4})$ (D) $(-\infty, \frac{9}{4}]$

(12) 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^t + 2^s \mid 0 \leq s < t \text{ 且 } s, t \in \mathbf{N}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 即 $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 9, a_5 = 10, a_6 = 12, \dots$. 则 $a_{50} =$ ()

(A) 1040 (B) 1056 (C) 16640 (D) 16896

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分。

(13) 若 $\begin{cases} -4 < x < 2 \\ -2 < y < 3 \end{cases}$, 则 xy 的取值范围是_____.

(14) $P = \{x | x = 3n + 1, n \in \mathbf{N}\}$, $Q = \{x | x = 5n + 2, n \in \mathbf{N}\}$, 则 $P \cap Q =$ _____.

(15) 实数 a, b, c 成等差数列, c, a, b 成等比数列, 则 $a : b : c =$ _____.

(16) 设点 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > b > 0$) 的两个焦点, 若椭圆 C 上存在点 P , 使得 $\angle F_1 P F_2 = 90^\circ$ 成立, 则椭圆 C 离心率的取值范围是_____.

三. 解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 10 分)

(I) 已知 x, y 满足: $\begin{cases} x + 3y - 4 \leq 0, \\ 3x + y + 4 \geq 0, \\ x - y \leq 0. \end{cases}$ 若 $z = 7x + y$, 求 z 的最大值和最小值;

(II) 已知 x, y 满足: $\begin{cases} x + 3y - 4 \leq 0, \\ 3x + y + 4 \geq 0, \\ x - y \geq 0. \end{cases}$ 若 $z = 7x + y$, 指出 z 的取值范围. (本问只

需写明结论即可, 不必书写证明、求解过程)

(18) (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = 7$, $a_2 + a_4 = 16$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n = \log_2 b_n$

($n \in \mathbf{N}^*$).

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $c_n = a_n b_n$, S_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和. 求 S_n .

(19) (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$. 当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $na_{n+1} = S_n + n(n+1)$ 恒成立.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \frac{S_n}{2^n}$, 如果对一切正整数 n 都有 $b_n \leq t$, 求 t 的最小值.

(20) (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (其中 $a > b > 0$) 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且经过点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设点 P 是椭圆 C 上动点, 求点 P 到定点 $M(m, 0)$ (其中 $m \in \mathbf{R}$) 距离的最小值, 并指出取得该最小值时点 P 的横坐标.

(21) (本小题满分 12 分)

已知椭圆 C 的焦点分别为 $(-1, 0)$ 和 $(1, 0)$, 且长半轴长为 2.

(I) 写出椭圆 C 的方程;

(II) 设 A, A' 是椭圆 C 与 x 轴的交点, 点 M 是椭圆 C 上异于 A, A' 的一动点, 直线

$AM, A'M$ 分别交 y 轴于点 M_1 和 M_2 . 求证: $|OM_1| \cdot |OM_2|$ 为定值;

(III) 设 B, B' 是曲线 C 与 y 轴的交点, 点 N 是曲线 C 上异于 B, B' 的一动点, 直线

$BN, B'N$ 分别交 x 轴于点 N_1 和 N_2 , 则 $|ON_1| \cdot |ON_2|$ 为定值. 请写出这个值. (本

问只需写明结论即可, 不必书写证明、求解过程)

(22) (本小题满分 12 分)

定期定额投资, 是一种投资方法, 就是每隔一段固定时间(一个月或两个月)以固定的金额投资于同一投资产品. 对于大多数没有时间研究经济景气变化的投资人而言, 定期定额投资策略可以说是相当省时省力的投资方法, 并且还可以避免不小心买在高点的风险. 因此“定期定额投资”常被称为“懒人理财术”、“傻瓜理财术”.

下面我们以数学的方式来研究“定期定额投资”.

某投资产品 J 的单价是不断的上下波动变化的, 记其在 2014 年 7 月 1 日的单价为 t_1 元/单位, 在 2014 年 8 月 1 日的单价为 t_2 元/单位, 在 2014 年 9 月 1 日的单价为 t_3 元/单位, 在 2014 年 10 月 1 日的单价为 t_4 元/单位, 在 2014 年 11 月 1 日的单价为 t_5 元/单位.

我们来对比以下两种购买方式:

(a) 在上述五个日期中, 每次都购买 N 个单位的投资产品 J ;

(b) 在上述五个日期中, 每次都购买 M 元的投资产品 J (即定期定额投资策略);

设两种购买方式所购投资产品 J 的平均单价分别为 T_a 和 T_b , 显然:

$$\text{平均单价} = \frac{\text{投资总额}}{\text{所购产品的总单位数}}.$$

(I) 用 t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 , 表示 T_a 和 T_b ;

(II) 证明: $T_a \geq T_b$, 并指出 $T_a = T_b$ 的条件. (即定期定额投资平均单价较低)